<u>ตอนที่ 1</u> 17 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน

1. 3	2. 2	3. 4.	4. 1	5. 4
6. 2	7. 4	8. 1	9. 4	10. 4
11. 4	12. 4	13. 3	14. 1	15. 4
16. 3	17. 4			

<u>เฉลยละเอียด</u>

1. เฉลย ข้อ 3. 62

ข้อนี้ เป็นโจทย์แนวข้อสอบ Ent ที่ออกมาหลายครั้งมากแล้วครับ

$A=\{\phi,0,1,\{1\},\{1,2\},\{3\}\}$

$P(A)=\underbrace{\{\phi,0,1,\{1\},\{1,2\},\{3\}\}}_{2^6=64\text{ ตัว}} \Leftarrow n[P(A)]=2^{n(A)}=2^6=64$

A และ P(A) มีสมาชิกที่ซ้ำกัน2 ตัวคือ $\phi,\{1\}$

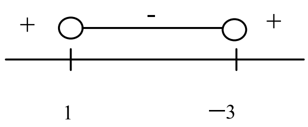
ดังนั้น $P(A)-A$ จึงมีสมาชิก $64-2=62$ ตัว

2. เฉลย ข้อ 2. $(-2,-1)$

ข้อนี้เคยเป็นข้อสอบ Ent เก่ามากๆ เห็นว่าน่าสนใจดีและข้อสอบเคยออกคล้ายแบบนี้มาอีกหลายครั้ง

$x^2+2x-3<0$

$(x+3)(x-1)<0$



เซตคำตอบ $(-3,1)$

การที่ $\forall x$ จะเป็นจริงได้แสดงว่า $U\subset$ เซตคำตอบ ซึ่งมีตัวเลือกเดียว คือ $(-2,-1)$

3. เฉลย ข้อ 4. $\sim p\rightarrow(\sim q\wedge\sim r)$

แนวคิด $p\rightarrow(q\vee r)\equiv\sim p\vee(q\vee r)$

$\equiv\sim p\vee q\vee r$

1. ถูก เพราะ $(\sim q\wedge\sim r)\rightarrow\sim p\ \equiv\sim(\sim q\wedge\sim r)\vee\sim p$

$\equiv q\vee r\vee\sim p$

$\equiv\sim p\vee q\vee r$

2. ถูก เพราะ $(p\wedge\sim q)\rightarrow r\equiv\sim(\sim p\wedge\sim q)\vee r$

$\equiv\sim p\vee q\vee r$

3. ถูก เพราะ $(p\wedge\sim r)\rightarrow q\equiv\sim(\sim p\wedge\sim r)\vee q$

$\equiv\sim p\vee r\vee q$

4. ผิด เพราะ $\sim p\rightarrow(\sim q\wedge\sim r)\equiv p\vee(\sim q\wedge\sim r)$

$\equiv(p\vee\sim q)\wedge(p\vee\sim r)$

4. เฉลย ข้อ 1. $24y-8x-3=0$

แนวคิด $3x+4y-7=0$ ------------------- (1)

$5x+12y-15=0$ ------------------- (2)

หาจุดตัด $(1)\times3;\ 9x+12y-12=0$

$(3)-(2);\ 4x-6=0$

$4x=6\Rightarrow x=\frac{3}{2};\ y=\frac{5}{8}$

จุดตัดของเส้นตรง คือ $\frac{3}{2},\frac{5}{8}$

เส้นตรง $3x+y-5=0$ มีความชันเท่ากับ -3 เส้นตรง L เท่ากับ $\frac{1}{3}$

ดังนั้นสมการเส้นตรง L คือ

$$y-\frac{5}{8}=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$24y-15=8x-12$$

$$24y-8x-3=0$$

5. เฉลย ข้อ 4. 10

ข้อนี้ไม่ยากต้องดึงฐานร่วมออกมา

$$3^{x^2}-3^{x^2-1}=54\sqrt{3}$$

$$3^{x^2}(1-3^{-1})=54\sqrt{3}$$

$$3^{x^2}=27\cdot\sqrt{3}\cdot3$$

$$3^{x^2}=3^{3+\frac{1}{2}+1}$$

$$3^{x^2}=3^{\frac{9}{2}}$$

$x^2=\frac{9}{2}$ นำไปแทนค่าใน $2x^2+1$

$$2x^2+1=2(\frac{9}{2})+1=10$$

6. เฉลย ข้อ 2. 0.50

แนวคิด กำหนด $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ และ $\tan^2\theta-4\tan\theta+1=0$

จะได้ว่า $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-4\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1=0$

$$\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+\cos^2=0$$

$$1-4\sin\theta\cos\theta=0$$

$$1-2(2\sin\theta\cos\theta)=0$$

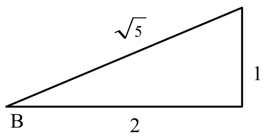
$$1-2\sin2\theta=0$$

ดังนั้น $\sin2\theta=\frac{1}{2}=0.5$

7. เฉลย ข้อ 4. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

ให้หาค่าของ $\cos\left[\arcsin\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)-\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right]$

ให้ $\arcsin\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=A$



$$\sin A=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$A=-\frac{\pi}{4}$$

$$\cos A=\cos(-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

และให้ $\arccos(\dfrac{2}{\sqrt{5}})=B$

$$\cos B=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

พิจารณาจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่า $\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

ดังนั้น $\cos\left[\arcsin\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)-\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right]=\cos(A-B)$

$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$=(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{2}{\sqrt{5}})+(-\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$=\frac{2}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

8. เฉลย ข้อ 1. 3

แนวคิด กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ x & 5\end{bmatrix}$

จะได้ $A^2=\begin{bmatrix}x+4 & 7\\ 7x & x+2\end{bmatrix}$

จากสมการ $A^2-7A=\begin{bmatrix}-7 & 0\\ 0 & -7\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}x+4 & 7\\ 7x & x+25\end{bmatrix}-7\begin{bmatrix}2 & 1\\ x & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 0\\ 0 & -7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x+4 & 7\\ 7x & x+25\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}14 & 7\\ 7x & 35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 0\\ 0 & -7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x-10 & 0\\ 0 & x-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 0\\ 0 & -7\end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x-10=-7$

$$x=3$$

9. เฉลย ข้อ 4. $\det(\mathrm{adj}A)=64$

เมตริกซ์ A เป็นเมตริกซ์มิติ 4×4 และ $\det(2A)=64$

ดังนั้น $2^4\det A=64$

$$\det A=4$$

ข้อ 1 ถูก เพราะ $\det(-A)=(-1)^4\det A=\det A=\det A=4$

ข้อ 2 ถูก เพราะ $\det(AA^Z)=\det A\cdot\det A^Z=\det A\cdot\det A=4\times 4=16$

ข้อ 3 ผิด เพราะ $\det(2A^{-1})=2^4\det(A^{-1})=16(\dfrac{1}{\det A})=16\times\dfrac{1}{4}=4$

ข้อ 4 ถูก เพราะจากสูตร $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}(\mathrm{adj}A)$

$$=\frac{1}{4}(\mathrm{adj}A)$$

$$4A^{-1}=\mathrm{adj}A$$

$$\det(4A^{-1})=\det(\mathrm{adj}A)$$

$$4^4\det A^{-1}=\det(\mathrm{adj}A)$$

$$4^4(\frac{1}{4})=\det(\mathrm{adj}A)$$

ดังนั้น $\det(\mathrm{adj}A)=4^3=64$

10. เฉลย 4. 55,350

แนวคิด

$S=\{108,117,126,\ldots,999\}$ คือ สมาชิกของเซต S เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิตที่ 9 หารลงตัวหาจำนวนสมาชิกจาก $a_n=a_1+(n-1)d$

เมื่อ $a_1=108, a_n=999, d=9$

แทนค่าได้ $999=108+(n-1)9$

$$\frac{999-108}{9}=n-1$$

$$n-1=99\Rightarrow n=100$$

ลำดับเลขคณิตที่ 9 หารลงตัวคือ $S_n=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$

$$=\frac{100}{2}(108+999)$$

$$=1{,}107\times 50=55{,}350$$

11. เฉลย ข้อ 4. f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$

แต่ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=2$

จาก
$$f(x)=\begin{cases}x-\dfrac{3}{x^2+1} & \text{เมื่อ } x\le 0\\ 3 & \text{เมื่อ } 0<x\le 2\\ \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{เมื่อ } x>2\end{cases}$$

ข้อ 1. ผิด $f(0)=-3$, $\lim_{n\to 0^-} f(x)=-3$ $\lim_{n\to 0^+} f(x)=3$

ลิมิตซ้าย $\neq$ ลิมิตขวา

แสดงว่าไม่มีลิมิต ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$

ข้อ 2. ผิด $f(2)=3$, $\lim_{n\to 2^-} f(x)=3$, $\lim_{n\to 2^+} f(x)=3$

ดังนั้น $\lim_{n\to 2} f(x)=3=f(x)$

f ต่อเนื่องที่ $x=2$

ข้อ 3. ดูจาก 1 และ 2

ข้อ 4. ดูจาก 1 และ 2

12. เฉลย ข้อ 4. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง A และเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง B

แนวคิด กำหนด $f(x)=\dfrac{3x-1}{5x-2}$ และให้ A แทนช่วง $(-\infty,-\dfrac{2}{5})$

B แทนช่วง $(\dfrac{1}{3},\infty)$

$$f'(x)=\frac{(5x+2)(3)-(3x-1)(5)}{(5x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{15x+6-15x+5}{(5x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{11}{(5x+2)^2}$$

เนื่องจาก $f'(x)$ คือ ความชันโค้ง ณ จุด (x,y) ใดๆ บน f และสำหรับ $x\in[a,b]$ ใดๆ

ถ้า $f'(x)>0$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงนั้น ถ้า $f'(x)<0$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วงนั้น

ดังนั้น ถ้า $x\in A$ จะได้ $f'(x)>0$ และ $x\in B$ จะได้ $f'(x)>0$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มทั้งบนช่วง A และช่วง B

13. เฉลย ข้อ 3. 9

แนวคิด ให้ $f(x)=Ax^2+Bx+C$ เมื่อ $A,B,C\in R$

โดยที่ $f'(1)=-2$, $f''(2)=2$ และ $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{7}{3}$

จาก $f(x)=Ax^2+Bx+C$, $f'(x)=2Ax+B$

$f'(1)=-2$

ดังนั้น $2A=2, A=1$

แทนค่า $A=1$ ใน (1) , $2+B=-2, B=-4$

จะได้ว่า $f(x)=x^2-4x+C$ และจาก $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{7}{3}$

จะได้ว่า

$$\int_0^1 (x^2-4x+C)dx=\frac{7}{3}$$

$$\left.\frac{x^3}{3}-2x^2+Cx\right|_0^1=\frac{7}{3}$$

$$\frac{1}{3}-2+C=\frac{7}{3};\ C=4$$

ดังนั้น $|A-B+C|=|1+4+4|=9$

14. เฉลย ข้อ 1. ผิด

แนวคิด

ข้อ 1 ผิด เพราะ จำนวนวิธีที่เหรียญบาทจะเป็นหัว 2 ครั้ง $=P(6,2)$ $=30$ วิธี

ข้อ 2 ถูก เพราะ จำนวนวิธีจัดอันดับ 4 อันดับ $=P(7,4)=840$ วิธี

ข้อ 3 ถูก เพราะ จากการกระจาย $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^{15}$

$$T_{r+1}=\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

$$=\binom{15}{r}(x^2)^{15-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$$

พจน์ที่ไม่มี x คือพจน์ที่มี x^0

ดังนั้น

$$\frac{x^{30-2r}}{x^r}=x^0$$

$$x^{30-3r}=x^0$$

$$30-3r=0;\ r=10$$

จึงได้ว่า $T_{r+1}=T_{11}$

ข้อ 4 ถูก เพราะ จากสมการ $\dfrac{n!}{(n-22)!22!}=\dfrac{n!}{(n-9)!9!}$

$$\frac{(n-9)!}{(n-22)!}=\frac{22!}{9!}$$

$$(n-9)(n-8),\dots,(n-21)=22\times21\times\dots\times10$$

ดังนั้น $(n-9)=22\Rightarrow n=31$

15. เฉลย ข้อ 4. $\dfrac{8}{15}$

แนวคิด ความน่าจะเป็นที่สมหวังหรือสมชายซึ่งเป็นผู้สมัครใน 10 คนได้เป็นกรรมการบริหารให้หาจาก $=1-$ (กรณีที่เลือกโดยไม่มีสมชายหรือสมหวังเป็นกรรมการ/กรณีทั้งหมด)

กรณีที่เลือกโดยไม่มีสมชายหรือสมหวังเป็นกรรมการ $=\dbinom{8}{3}$

$$=\frac{8!}{5!3!}=\frac{8\times7\times6}{3\times2}=56$$

กรณีทั้งหมดที่เลือกกรรมการ $=\dbinom{10}{3}$

$$=\frac{10!}{7!3!}=\frac{10\times9\times8}{3\times2}=120$$

ความน่าจะเป็นที่สมหวังหรือสมชายซึ่งเป็นผู้สมัครใน 10 คน ได้เป็นกรรมการบริหาร

$$=1-\frac{56}{120}=\frac{64}{120}=\frac{8}{15}$$

16. เฉลย ข้อ 3. 73.3

คะแนนสอบ	ความถี่	ความถี่สะสม
⋮	⋮	⋮
75 – 79	40	152
70 – 74	50	112 ← ตำแหน่ง 100 อยู่ชั้นนี้
65 – 69	26	62
⋮	⋮	⋮

การหามัธยมฐาน

STEP 1 หาตำแหน่ง (ค่าของ $N = 200$ บอกมา)

จะอยู่ที่ตำแหน่ง $\frac{N}{2} = \frac{200}{2} = 100$

STEP 2 แทนค่าสมการ

$$\text{med} = L + I\left(\frac{\frac{N}{2} - F}{f}\right)$$

$$= 69.5 + 5\left(\frac{100 - 62}{50}\right)$$

$$= 73.3$$

17. เฉลย ข้อ 4. $\sqrt{3}$

$$\sum x = 60 \text{ , } N = 10$$

$$\bar{x} = \frac{60}{10} = 6$$

$$\sum (x_i - 3)^2 = 120$$

$$\sum (x^2 - 6x + 9) = 120$$

$$\sum x^2 - 6\sum x + \sum 9 = 120$$

$$\sum x^2 - 6(60) + 90 = 120$$

$$\sum x^2 = 390$$

$$\text{S.D.} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - (\bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{390}{10} - (6)^2}$$

$$= \sqrt{39 - 36} = \sqrt{3}$$

ตอนที่ 2 22 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน

1. 2	2. 2	3. 2	4. 4	5. 2
6. 4	7. 4	8. 3	9. 4	10. 4
11. 4	12. 3	13. 1	14. 2	15. 3
16. 1	17. 2	18. 1	19. 3	20. 3
21. 3	22. 1			

เฉลยละเอียด

1. ตอบ ข้อ 2. ข้อ (ก) เท่านั้นเป็นจริง

ข้อ ก ถูก น้องๆ ทราบว่า $\{\Delta\} \in P(O)$ แสดงว่า $\{\Delta\} \subset O$ นั่น คือ $\Delta \in O$ (จำนิยามสับเซตและเพาเวอร์เซตได้นะครับ)

นั่นคือ $\{\{1\}\} \in P(P(A))$ แสดงว่า $\{\{1\}\} \subset P(A)$

จะได้ว่า $\{1\} \in P(A)$ และได้ $\{1\} \subset A$

จึงสรุปได้ว่า $1 \in A$

ดังนั้น ต้องการพิสูจน์ว่า $1 \in A$ หรือไม่ โดยใช้ ท.บ. แยกตัวประกอบช่วย หาว่า $P(1) = 0$ หรือไม่

จาก $P(x) = 2x^4 + x^2 - x - 2$

$P(1) = 2(1)^4 + 1^2 - 1 - 2 = 0$

แสดงว่า $1 \in A$ แน่ (น้องๆ ไม่ต้องแก้สมการหา x จาก $P(x) = 0$ ก็ได้นะครับ)

ข้อ ข ผิด เนื่องจาก $B = \{0, \{0\}\}$

ดังนั้น $n(P(B) - B) = n(P(B)) - n(P(B) \cap B)$

$= 2^2 - 1$

$= 4 - 1$

$= 3$

$\therefore$ ข้อ ก. ถูก แต่ข้อ ข . ผิด

> ตัวที่ $P(B)$ กับ B ซ้ำกันมีกี่ตัวให้พิจารณาจากสมาชิกของ B ว่าตัวไหนเป็นสมาชิกของ $P(B)$ นั่นเอง ซึ่งมี $\{0\}$ เพียงตัวเดียว

2. ตอบ ข้อ 2. 251

ใช้สมบัติการหารโดยให้ $P_1, P_2, P_3 \in I$

จาก a หารด้วย 7 เหลือเศษ 6 จะได้ $a = 7(P_1) + 6$

a หารด้วย 9 เหลือเศษ 8 จะได้ $a = 9(P_2) + 8$

a หารด้วย 12 เหลือเศษ 6 จะได้ $a = 11(P_3) + 11$

สังเกตว่าขาดอีก 1 แต้ม ก็จะหารลงตัวแล้วครับ นั่นคือ บวกอีก 1 ตัวทั้ง 2 ข้างจะได้

$$a + 1 = 7(P_1 + 1)$$

$$a + 1 = 9(P_2 + 1)$$

$$a + 1 = 11(P_3 + 1)$$

แสดงว่า $a+1$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ 7,9,12 หารลงตัว หรือก็คือ ต้องเป็น ค.ร.น. ของเลข 7,9,12 นั่นเอง

จะได้ว่า $a+1=252$

ดังนั้น $a=251$

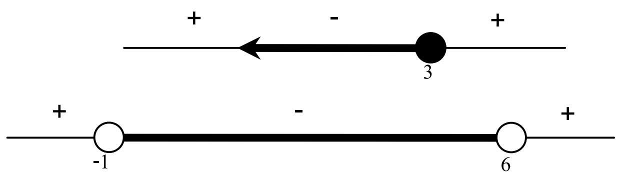
3. ตอบ ข้อ 2. $(-1,5)$

ใช้นิยามของโดเมนพีชคณิตช่วยไม่ต้องหาฟังก์ชันพีชคณิตนะครับโดย

$$f(x)=\sqrt{3-x}\ ,\ g(x)=\sqrt{-x^2+5x+6}$$

โจทย์ต้องการ $D_U=D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g\cap g(x)\neq 0$ (จำนิยามได้ไหมครับ)

$$=(3-x\geq 0)\cap(-x^2+5x+6\geq 0)\cap(-x^2+5x+6\neq 0)$$
$$=(x\leq 3)\cap -x^2+5x+6>0$$
$$=(x\leq 3)\cap x^2-5x-6<0$$
$$=(x\leq 3)\cap(x-6)(x+1)<0$$

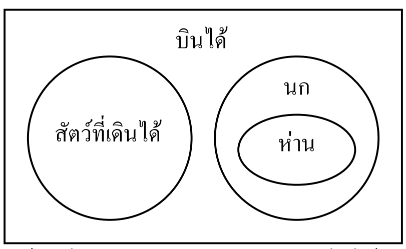


$D_U=(-1,3]$ เป็นสับเซตในข้อ 2

4. ตอบ ข้อ 4. ข้อ 1. และ ข้อ 2. ไม่สมเหตุสมผล

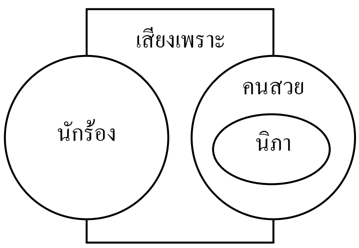
แนวคิด พิจารณาทีละข้อโดยการเขียนแผนภาพ

ข้อ 1.



สรุปข้อ 1. ไม่สมเหตุสมผล เพราะห่านเดินไม่ได้

ข้อ 2.



สรุปข้อ 2. ไม่สมเหตุสมผล เพราะนิภาไม่ได้เป็นนักร้อง

5. ตอบ ข้อ 2. ก. ถูก และ ข. ผิด

พิจารณาจากข้อ ก. และ ข้อ ข. พบว่า ต้องหา $D_r, R_r, D_{s^{-1}}=R_s$ และ $R_{s^{-1}}=D_s$ นั่นคือ

พิจารณาโดเมนและเรนจ์ทั้ง r และ s

พิจารณา D_r, R_r จาก $r\Rightarrow y=\sqrt{9-x^2}$

น้องมองกราฟของ r ออกหรือไม่โดย $y=\sqrt{9-x^2}\ , y\geq 0$

$$y^2=9-x^2\Rightarrow x^2+y^2=9$$

r เป็นกราฟครึ่งวงกลม $(y\geq 0)$ โดยมีศูนย์กลางที่ $(0,0)$ และรัศมี 3 หน่วย

ดังนั้น $D_r=[-3\ 3]$ และ $R_r=[0,3]$

> **หมายเหตุ**
> ถ้าท่านมองกราฟออกก็จะได้โดเมนและเรนจ์ได้ทันที $D_r=$ ค่า x ที่ใช้ในการเขียนกราฟ , $R_r=$ ค่า y ที่ใช้ในการเขียนกราฟ แต่ถ้าท่านมองไม่ออกต้องใช้การจัด $y=r(x)$ ในการหา D_r และ R_r ซึ่งเสียเวลามากกว่า

พิจารณา $D_{s^{-1}}$ และ $R_{s^{-1}}$ จาก $s\Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

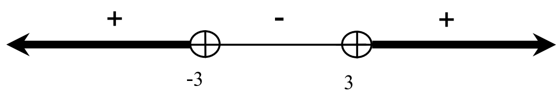
การหา D_s และ R_s นี้อาจจะมองจากกราฟไม่ออกก็ให้หา D_s ก่อนเพราะง่าย เนื่องจากสมการจัด $y=s(x)$ อยู่แล้วเมื่อได้ขอบเขตของ x แล้วนำไปประมาณค่า y ใช้เป็นค่า R_s

ดังแสดงต่อไปนี้

จาก $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

$D_s\in R$ ที่ $x^2-9>0$ (ส่วน $\neq 0$ และค่าภายในราก ≥ 0)

$(x-3)(x+3)>0$



$\therefore\ R_{s^{-1}}=D_s=(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$

หา R_s ด้วยการประมาณเมื่อทราบค่า x จาก

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}, x=(-\infty,-3)\cup(3,\infty)\Rightarrow x^2=(9,\infty)$$

ดังนั้น $0<y<\infty$

> เกิดจาก x^2 มากสุด $=\infty$
> แทน $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{1}{\infty}\approx 0$

> เกิดจาก x^2 น้อยสุด $=9$ (ไม่รวม9)
> แทน $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}=\frac{1}{\infty}\approx 0$

$\therefore\ D_{s^{-1}}=R_s=(0,\infty)$

พิจารณาข้อ ก. $D_r\cap R_{s^{-1}}=[-3,3]\cap\{(-\infty,-3)\cup(3,\infty)\}=\phi$

พิจารณาข้อ ข. $R_1\cup D_{s^{-1}}=[0,3]\cup(0,\infty)=[0,\infty)$

$\therefore$ ข้อ ก. ถูก ข้อ ข. ผิด

6. ตอบ ข้อ 4. 3

ไม่ต้องหา $f'(x)$ และ $g^{-1}(x)$ ก็ทำได้ โดยใช้หลักที่ว่า

$f'(x) =$ ค่า y ของ $f'(x)$ เมื่อ $x = 1$ ซึ่งมีความหมายเหมือนกับ

$f'(x) =$ ค่า x ของ $f(x)$ เมื่อ $y = 1$ (ตรงนี้แหละครับที่จะช่วยหาคำตอบให้น้อง)

โจทย์ $(g^{-1}of^{1})(1) = g^{-1}[f^{1}(1)]$

$= g^{-1}(\sqrt[3]{2}) = 3$

$(g^{-1}of^{1})(1) = 3$

> $f'(1) =$ ค่า x ของ $f(x)$ เมื่อ $y = 1$ ซึ่ง $f(x)$ มี 2 เงื่อนไข
>
> **เงื่อนไข 1**
>
> $y = x^3 - 1, x \geq 1$
>
> $1 = x^3 - 1$
>
> $x = \sqrt[3]{2}$ ใช้ได้เลย
>
> **เงื่อนไข 2**
>
> ไม่ต้องหาก็ได้ แต่ถ้าน้องลองทำอยู่จะหา x ไม่ได้ในเงื่อนไขที่กำหนด

7. ตอบ ข้อ 4. $y^2 = -12x$

งานแรกท่านต้องหาจุดศูนย์กลางของวงกลม

$x^2 + 6x + y^2 = 0 (x^2 + y^2 Cx + Dy + E = 0)$

มีจุดศูนย์กลาง $= \left(-\frac{6}{2}, 0\right) = (-3, 0)$ (จาก $\left(-\frac{C}{2}, -\frac{D}{2}\right)$)

ดังนั้น พาราโบลามีจุดโฟกัสอยู่ที่จุดศูนย์กลางวงกลม $= (-3, 0)$ มีเส้น $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์ ($x = 3$ เป็นเส้นตรงขนานแกน y (แนวตั้ง) ตัดแกน x ที่ 3)เขียนรูปได้พาราโบลา ตะแคงซ้าย มีแกนพาราโบลาเป็นแกน x หาจุดยอดของพาราโบลา $\Rightarrow (h, k) = (0, 0)$ (เป็นจุดแบ่งครึ่งระหว่างจุดโฟกัสกับเส้นไดเรกตริกซ์)

หา c โดย $c =$ ระยะระหว่างโฟกัสกับจุดยอด

$= |0 - (-3)| = 3$

แต่เป็นพาราโบลาตะแคงซ้าย ค่า c เป็นลบ $\therefore c = -3$

สมการพาราโบลาที่มีจุดยอด $(0, 0)$ และมีพาราโบลาเป็นแกน x คือ

$y^2 = 4cx$

$y^2 = 4(-3)x$

$y^2 = -12x$

> **วิธีการตัดตัวเลือก**
>
> เมื่อน้องๆ วาดรูปพาราโบลาตามเงื่อนไขของโจทย์ ได้เป็นพาราโบลาตะแคงซ้าย ท่านพิจารณาตัวเลือก ถ้าน้องๆค่อนข้างเข้าใจสมการมาตรฐานของแต่ละข้อว่าได้พาราโบลารูปแบบใด ซึ่งก็สามารถหาคำตอบได้ทันทีเลยนะ

ข้อ 1. $x^2 = 12y \Rightarrow$ แกนของพาราโบลาเป็นแกน y ค่า c เป็น+

$\Rightarrow$ พาราโบลาหงาย

ข้อ 2. $x^2 = -12y \Rightarrow$ แกนของพาราโบลาเป็นแกน y ค่า c เป็น –

$\Rightarrow$ พาราโบลาคว่ำ

ข้อ 3. $y^2 = 12x \Rightarrow$ แกนของพาราโบลาเป็นแกน x ค่า c เป็น +

$\Rightarrow$ พาราโบลาตะแคงขวา

ข้อ 4. $y^2 = -12x \Rightarrow$ แกนของพาราโบลาเป็นแกน x ค่า c เป็น –

$\Rightarrow$ พาราโบลาตะแคงซ้าย

พาราโบลาตะแคงซ้ายมีข้อเดียวคือข้อ 4 ตอบได้เลยเห็นไหม

8. ตอบ ข้อ 3. แกนโทของวงรียาว 3 หน่วย

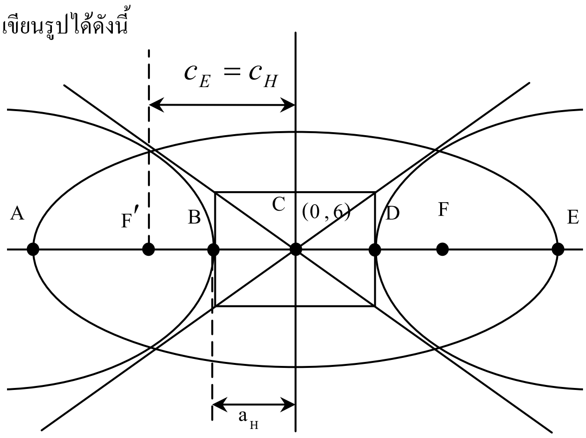
ทำการจัดสมการไฮเปอร์ เพื่อหารายละเอียดพร้อมเขียนรูปหยาบๆ โยงไปสู่วงรี จึงจะเริ่มพิจารณาตัวเลือกได้จากสมการไฮเปอร์โบล่า

$3x^2 - y^2 + 12y - 48 = 0$

$3(x^2) - (y^2 - 12y + 6^2) = 48 - 36$

หาร 12 $\frac{(x-0)^2}{4} - \frac{(y-6)^2}{12} = 1$

เทียบกับมาตรฐานไฮเปอร์ มีศูนย์กลาง = (h,k) = (0,6), $a = 2$, $b = \sqrt{12}$, $c = 4$ ได้ไฮเปอร์โบล่าที่มีแกนตามขวางขนานแกน x เขียนรูปได้ดังนี้



พร้อมกับวงรีตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมา เริ่มตรวจสอบได้แล้วข้อ 1 ถูก จุดยอดไฮเปอร์โบล่าต้องอยู่ทางด้านซ้ายกับขวาของศูนย์กลางด้วยระยะทาง 2 หน่วย

$\therefore$ จุดยอด $B, D = (0 \pm 2, 6) = (2, 6)$ กับ $(-2, 6)$

ข้อ 2-4

| จุดยอดวงรีกับจุดยอดไฮเปอร์ (จุดที่ไกลกัน)

| $= |AD|$ หรือ $|BE|$

$= |AC| + |CD|$

$= a_E + a_h$ ---------------------(1)

ต้องหา b_E ก่อนจากสมการวงรี ซึ่งเป็นวงรีที่มีแกนเอกขนานแกน x มีศูนย์กลาง $= (h, k) = (0, 6)$

มี $c_E = c_H = 4, a_E^2 = b_E^2 + c_E^2 = b_E^2 + 16$

สมการคือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{b_E^2+16}+\frac{(y-6)^2}{b_E^2}=1$$

วงรีผ่านจุด $(3,\frac{18}{5})$ จะได้

$$\frac{9}{b_E^2+16}+\frac{(\frac{18}{5}-6)^2}{b_E^2}=1 \qquad \text{---------------------(2)}$$

ถึงตรงนี้ น้องๆก็พยายามแก้สมการหา b_E ได้แน่ แต่ถ้าน้องมีไหวพริบด้วยการใช้ข้อ 3 เข้ามาช่วยก็จะเร็วขึ้นนะครับ ตรวจเลยว่า $b_E=\frac{3}{2}$ หรือไม่ (แกนโทยาว 2b) แทนลงใน (2)

$$\frac{9}{\frac{9}{4}+16}+\frac{(-\frac{12}{5})^2}{\frac{9}{4}}=1$$

$$\frac{36}{13}+\frac{4}{9}(\frac{144}{25})=1$$ เป็นเท็จ

$\therefore$ ข้อ 3 ผิด

ถ้าต้องการรู้ต่อ ทำโดยแต่ถ้าแทน $b_E=3$ หน่วยลงใน (1) จะเป็นจริง

นั่นคือ ความยาวแกนโท $=2b_E=6$ หน่วย

ความยาวแกนนอก $=2a_E=2(\sqrt{9+16})=10$ หน่วย

ดังนั้น ความยาวแกนเอกยาวกว่าแกนโท $=10-6=4$ หน่วย

และจาก (1) ระยะทางจากจุดยอดวงรีถึงจุดยอดไฮเปอร์ (จุดที่ไกลกัน)

$=a_E+a_H$

$=5+2=7$

9. ตอบ ข้อ 4. 0.25

หา x จาก $2^{+3x-1}\cdot 6^x\cdot 25^{5x-1}=75^x$

$$2^{3x-1}\cdot(3\times 2)^x\cdot 5^{10x-2}=(5^2\times 3)^x$$

$$2^{3x-1}\cdot 2^x=\frac{5^{2x}\cdot 3^x}{5^{10x-2}\cdot 3^x}$$

$$2^{4x-1}=5^{2-8x}$$

$$2^{4x-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{8x-2}$$

$$2^{4x-1}=\left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^{4x-1}$$

$$2^{4x-1}=\left(\frac{1}{25}\right)^{4x-1}$$

เลขชี้กำลัง $4x-1$ กับ $2-8x$ จะจัดให้เป็นเลขชี้กำลังเท่ากันได้ ถ้าทำได้ ก็จะใช้หลัก $a^m=b^m$ จะได้ว่า $m=0$

สรุปได้ว่า $4x-1=0$

10. ตอบ ข้อ 4. [-3 ,3]

หา x จาก $\log_2(9^{x+1}+15)=2+\log_2(61\cdot 3^x-3)$

$$\log_2(9^{x+1}+15)=\log_2 2^2+\log_2(61\cdot 3^x-3)$$

$$\log_2(9^{x+1}+15)=\log_2 4\cdot(61\cdot 3^x-3)$$

จากกฎของ log ดังนั้น $9^{x+1}+15=4\cdot 61\cdot 3^x-3$

$$9\cdot 9^x-244\cdot 3^x+27=0$$

$$9\cdot 3^{2x}-244\cdot 3^x+27=0$$

สมมติให้ $3^x=y$ เพราะฉะนั้นจะได้สมการใหม่เป็น $9y^2-244y+27=0$

แก้สมการได้ $(9y-1)(y-27)=0$ อย่าลืม! เราสมมติให้ $3^x=y$

ดังนั้น $(9\cdot 3^x-1)(3^x-27)=0$

สรุปได้ว่า $3^x=\frac{1}{9}$ หรือ $3^x=27$

$3^x=3^{-2}$ หรือ $3^x=3^3$

$x=-2$ หรือ 3 อยู่ในช่วงของ ข้อ 4

11. ตอบ ข้อ 4. -13

จากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาคือ $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$

และ $|\bar{a}|=3,|\bar{b}|=1,|\bar{c}|=4$

จะได้ว่า $\bar{a}$ กับ $\bar{b}$ ต้องมีทิศทางเดียวกัน (0°) และ $|\bar{c}|$ มีทิศตรงข้ามกับ $\bar{a}(180^\circ)$

พอจะจินตนาการได้ไหมครับ ว่าขนาดของเวกเตอร์มันร่วมกัน

ดังนั้น $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos 0^\circ$

$=(3)(1)(1)=3$

$\bar{b}\cdot\bar{c}=|\bar{b}||\bar{c}|\cos 180^\circ$

$=(1)(4)(-1)=-4$

$\bar{c}\cdot\bar{a}=|\bar{c}||\bar{a}|\cos 180^\circ$

$=(4)(3)(-1)=-12$

$\therefore\ \bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\bar{c}\cdot\bar{a}=3+(-4)+(-12)=-13$

12. ตอบ ข้อ 3. 169

หา a , b ก่อนโดย $s=at^2+bt+1$

เงื่อนไข 1 $v(t=2)=18$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2}=18$$

$$(2at+b)|_{t=2}=18$$

$4a+b=18$ -------------------- (1)

เงื่อนไข 2 $v_{avr}(t=1\rightarrow 5)=28$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(5)-s(1)}{5-1}=28$$

$$\frac{(25a+5b+1)-(a+b+1)}{4}=28$$

$$\frac{24a+4b}{4}=28 \quad \text{---------------------- (2)}$$

$2a=10$

$a=5$ แทนใน (1)

$20+b=18$

$b=-2$

$\therefore\ s=at^2+bt+1=5t^2-2t+1$

$s=5(6)^2-2(6)+1$

$=180-12+1=169$ เมตร

13. ตอบ ข้อ 1. 2 i

ใช้คุณสมบัติการคูณการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วเพียงแค่ต้องจัด z แต่ละตัวให้อยู่ในรูปเชิงขั้วที่ถูกต้องก่อน

โดย $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ดังนั้น

$z_1=4(\cos\frac{7\pi}{24}+i\sin\frac{7\pi}{24})$ เรียบร้อยแล้ว

$z_2=3(\sin\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$

เมื่อ $\sin\frac{3\pi}{8}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8})=\cos\frac{\pi}{8}$

$=3(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$

$z_3=6(\sin\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12})$

เมื่อ $\sin(-\theta)=-\sin\theta, \cos(-\theta)=\cos\theta$

$$=6(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right))$$

โจทย์ต้องการหา

$$\frac{z_1z_2}{z_3}=\frac{(4)(3)}{(6)}\times\left\{\left[\cos(\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi}{8}-(\frac{-\pi}{12}))\right]+i\sin\left[\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi}{8}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]\right\}$$

คูณกัน ค่าสัมบูรณ์คูณกัน มุมบวกกัน
หารกัน ค่าสัมบูรณ์ หารกัน มุมลบกัน

$$=2\left[\cos\left(\frac{7\pi+3\pi+2\pi}{24}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi+3\pi+2\pi}{24}\right)\right]$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$=2(0+i)$

$=2i$

14. ตอบ ข้อ 2. $(\frac{1}{-2},1]$

ใช้คุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์ของ z ช่วยโดย

แหมน้องๆ ทราบอยู่แล้วใช่ไหมว่า
$z=a+bi\rightarrow|z|=\sqrt{a^2+b^2}$
$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$
$z\cdot\bar{z}=|z|^2$

$$\left|4iz^{-1}+9\bar{z}\right|=6\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{4i}{z}+9\bar{z}\right|=6\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{4i+9z\bar{z}}{z}\right|=6\sqrt{2}$$

$$\frac{\left|4i+9|z|^2\right|}{|z|}=6\sqrt{2}$$

$$\left|4i+9|z|^2\right|=6\sqrt{2}|z|$$

$$\sqrt{4^2+(9|z|^2)^2}=6\sqrt{2}|z|$$

ยกกำลัง 2 ข้าง $16+81|z|^4=72|z|^2$

$81|z|^4-72|z|^2+16=0$

$(9|z|^2-4)(9|z|^2-4)=0$

$|z|^2=\frac{4}{9} \Rightarrow |z|=\frac{2}{3}$ เป็นสับเซตในข้อ 2

15. ตอบ ข้อ 3. 3

หา x , y , z โดยใช้ det ช่วย

$$x=\frac{\begin{vmatrix}12&8&0\\20&12&2\\12&5&7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&8&0\\6&12&2\\0&5&7\end{vmatrix}}=\frac{-40}{-40}=1,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}4&12&0\\6&20&2\\0&12&7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&8&0\\6&12&2\\0&5&7\end{vmatrix}}=\frac{-40}{-40}=1$$

$$,z=\frac{\begin{vmatrix}4&8&12\\6&12&20\\0&5&12\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&8&0\\6&12&2\\0&5&7\end{vmatrix}}=\frac{-40}{-40}=1$$

$x+y+z=1+1+1=3$

16. ตอบ ข้อ 1. 3

แนวคิด $\because\ C = 2AB^{-1} + B^{-1}$

$\therefore\ CB = (2AB^{-1} + B^{-1})B$

$= 2A(B^{-1}B) + B^{-1}B$

$= 2AI + I$

$\therefore\ CB = 2AI + I$

$\det(CB) = \det(2AI + I)$

จะได้ $\det(C) \times \det(B) = \det(2AI + I)$ ------------ (1)

$\because\ 2A + I = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2a & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2a & 7 \end{bmatrix}$

$\therefore\ \det(2AI + I) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2a & 7 \end{bmatrix}$

$= (3 \times 7) - (2a \times 4) = 21 - 8a$

$\det(B) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = (-1 \times 1) - (2 \times 1) = -3$

และโจทย์กำหนดให้ $\det C = 1$

นำค่าต่างๆที่ทราบแทนใน (1) ได้

จะได้ $1(3) = 21 - 8a$

$8a = 21 + 3 = 24 \Rightarrow a = 3$

17. เฉลย ข้อ 2. 65

แนวคิด ให้นักเรียนหญิงมีจำนวน $= x$ คน สอบได้ 80%

$= \frac{80}{100}(x) = 0.8x$ คน

(จำนวนนักเรียนหญิงที่สอบได้)

ดังนั้น นักเรียนชายมีจำนวน $= 3x$ คน สอบได้ 60%

$= \frac{60}{100}(3x) = 1.8x$ คน

(จำนวนนักเรียนชายที่สอบได้)

จำนวนนักเรียนทั้งหมดที่สอบได้

= จำนวนนักเรียนหญิงที่สอบได้ + จำนวนนักเรียนชายที่สอบได้

$= 0.8x + 1.8x = 2.6x$

นักเรียนทั้งหมดของโรงเรียนนี้สอบได้ $= \frac{2.6x}{x + 3x} = \frac{2.6x}{4x} = 0.65$

เปอร์เซ็นต์(ร้อยละ 65)

18. ตอบ ข้อ 1. $x + y = 5$

แนวคิด จากเงื่อนไขที่กำหนด

$x + y \geq 4$

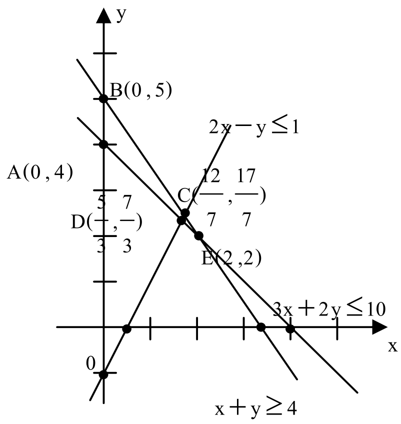
$3x + 2y \leq 10$

$2x - y \leq 1$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

เราสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



พิกัดของ A และ B คือ $(0, 2)$ และ $(0, 5)$ ตามลำดับ จุด D คือจุดตัดของเส้นตรง $x + y \geq 4$ และ $2x - y \leq 1$

ดังนั้น พิกัดของ D คือ $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$ และจุด C คือจุดตัดของเส้นตรง $3x + 2y \leq 10$ และ $2x - y \leq 1$

ดังนั้น พิกัดของ C คือ $\left(\frac{12}{7}, \frac{17}{7}\right)$

จาก $P(x, y) = 2x + 3y$ จะได้

$P(0, 2) = 6, P(0, 5) = 15$

$, P\left(\frac{12}{7}, \frac{17}{7}\right) = 2\left(\frac{12}{7}\right) + 3\left(\frac{17}{7}\right) = \frac{55}{7}$

และ $P\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right) = 2\left(\frac{5}{3}\right) + 3\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{31}{3}$

$\therefore$ $P(0, 5)$ มีค่ามากที่สุด นั่นคือ $P(x, y)$ มีค่ามากที่สุดสอดคล้องกับ $x + y = 5$

19. ตอบ ข้อ 3. 9

แนวคิด ให้ $f(x)=Ax^2+Bx+C$ เมื่อ $A, B, C \in R$

โดยที่ $f'(1)=-2, f''(2)=2$ และ $\int_0^1 f(x)dx=\frac{7}{3}$

จาก $f(x)=Ax^2+Bx+C, f'(x)=2Ax+B$

$f'(1)=-2$ ดังนั้น $2A=2, A=1$

แทนค่า $A=1$ ใน (1) $, 2+B=-2, B=-4$

จะได้ว่า $f(x)=x^2-4x+C$ และจาก $\int_0^1 f(x)dx=\frac{7}{3}$

จะได้ว่า $\int_0^1 (x^2-4x+C)dx=\frac{7}{3}$

$$\frac{x^3}{3}-2x^2+Cx\Big|_0^1=\frac{7}{3}$$

$$\frac{1}{3}-2+C=\frac{7}{3}; C=4$$

ดังนั้น $|A-B+C|=|1+4+4|=9$

20. ตอบ ข้อ 3.4

โจทย์กำหนด $\sum(x_i-11)^2$ มีค่าน้อยสุด แสดงว่าโจทย์กำหนด $\bar{x}$ นั่นเองโดย $\bar{x}=11$ และ $N=9$

โจทย์ถามหาความแปรปรวน $=S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{N}=\frac{\sum(x_i-11)^2}{9}$

ต้องหา $\sum(x_i-11)^2$ จาก $\sum(x_i-10)^2=45$

$$\sum[(x_i-11)+1]^2=45$$

$$\sum[(x_i-11)^2+2(x_i-11)+1]=45$$

$$\sum(x_i-11)^2+2\sum(x_i-11)+\sum 1=45$$

$$\sum(x_i-11)^2+2(0)+1(9)=45$$

$$\sum(x_i-11)^2=36$$

$$\therefore S^2=\frac{\sum(x_i-11)^2}{9}=\frac{36}{9}=4$$

21. ตอบ ข้อ 3. $\frac{2}{3}$

แนวคิด หากรณีที่แต้มตั้งแต่ 6 ขึ้นไปคือ $1+8, 2+4, 2+8, 4+8$ มีทั้งหมด 4 กรณี

> น้องๆ ควรจะทราบว่า
>
> $\sum_{i=1}^{N} c=cN$
>
> $\sum(f_i \pm g_i)=\sum f_i \pm \sum g_i$
>
> $\sum cf_i=c\sum f_i$
>
> $\sum(x_i-\bar{x})=0$

เราเลือกลูกบอล 2 ลูกจาก 4 ลูก คือ $\binom{4}{2}=\frac{4!}{(4-2)!2!}$

$$=\frac{4\times 3\times 2!}{2!2!}=6$$

ความน่าจะเป็นที่ผลรวมของหมายเลขมากกว่าหรือเท่ากับ 6 เท่ากับ

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

22. ตอบ ข้อ 1. 196

จากโจทย์ แสดงว่าน้ำหนักของถุงที่ทำการผลิต 95% ต้องอยู่ในขอบเขตของ $5000-k$

ถึง $5000-k$ นั่นคือ

$$P(5000-k<x_i<5000+k)=0.95$$

$$2P(0<x_i<5000+k)=0.95$$

$$P(0<x_i<5000+k)=0.475$$

$P(0<z<1.96)=0.475$ เปิดตารางค่า z

แสดงว่า $x_i=5000+k$ ตรงกับ $z=1.96$ หา k ได้จาก

$$z=\frac{x_i-\bar{x}}{SD}$$

$$1.96=\frac{5000+k-5000}{100}$$

$$k=196$$