

### 14 คณิตศาสตร์ A-NET

ตอนที่ 1: ข้อสอบแบบเลือกตอบ มี 25 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน

1. กำหนดให้  $A = \{x \mid x^2 - 6x - 16 \leq 0\}$

$$B = \{x \mid |2 - x| < 5\}$$

ถ้า  $A - B = [a, b]$  แล้ว  $a + b$  มีค่าเท่ากับเท่าไร

1. 15    2. 16    3. 17    4. 18

2. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ให้เอกภาพสัมพัทธ์ คือ  $(-2, -1)$

ข้อความ  $\forall x [x^2 + 2x - 3 < 0]$  มีค่าความจริงเป็นจริง

ข. นิเสธของข้อความ  $\forall x [P(x) \rightarrow [Q(x) \rightarrow R(x)]]$

คือ  $\exists x [P(x) \wedge Q(x) \wedge \sim R(x)]$

ข้อต่อไปนี้ข้อใดถูก

1. ก. และ ข.ถูก                                  2. ก. ถูก และ ข. ผิด                                  3. ก. ผิด และ ข.ถูก                                  4. ก. และ ข. ผิด

3. กำหนดให้เอกภาพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนเต็ม ประพจน์ใดต่อไปนี้ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

1.  $\forall x [(x < 0) \vee (x \geq 0)] \rightarrow \{\forall x [x > 0] \vee \forall x [x \leq 0]\}$   
 2.  $\{\exists x [x > 0] \wedge \exists x [x \leq 0]\} \rightarrow \exists x [(x > 0) \wedge (x \leq 0)]$   
 3.  $\forall x [(x > 0) \rightarrow (x > 0)] \rightarrow \{\exists x [x > 0] \rightarrow \forall x [x > 0]\}$   
 4.  $\forall x [(x > 0) \rightarrow (x > 0)] \rightarrow \{\forall x [x > 0] \rightarrow \forall x [x > 0]\}$

4. กำหนดให้  $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{2x+1}{3x+4}\}$

$$s = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x^2-4}{9-x^2}\}$$

เซตในข้อใดต่อไปนี้เป็น  $r_r \cap r_s$

1.  $(-\infty, -1) \cup [\frac{-4}{9}, \frac{2}{3})$

2.  $[\frac{-4}{9}, \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$

3.  $(-\infty, -1) \cup [\frac{-4}{9}, \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$

4.  $(-\infty, -1) \cup [\frac{-4}{9}, \infty)$

5. ถ้า  $h(x) = -4x + 13$  และ  $g^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$  แล้วถ้า  $g$  เป็นฟังก์ชันซึ่งทำให้  $\text{gof} = h$  แล้ว  $f(1.3)$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6.4    2. 6.8    3. 6.0    4. 6.2

6. ให้  $A$  และ  $B$  เป็นเมตริกซ์ ซึ่ง  $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ ,  $a$  เป็นจำนวนจริงบวก

ถ้า  $BA = A^{-1}$  และ  $\det(4B - I) = 0$  แล้ว  $a$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1    2. 2    3. 3    4. 4

7. กำหนดให้  $P$  เป็นพาราโบลาย  $y^2 - 2y - 8x - 7 = 0$  ซึ่งมี  $l$  เป็นเส้นไคเรตริกซ์ สมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของ  $P$  และมี  $l$  เป็นเส้นสัมผัสคือข้อใดต่อไปนี้

1.  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$

2.  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

3.  $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$

4.  $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 14 = 0$

8. ให้วงรีผ่านจุด  $(3, \frac{18}{5})$  และมีโฟกัสร่วมกับไฮเพอร์โบลา  $3x^2 - y^2 + 12y - 48 = 0$  ข้อใดต่อไปนี้ผิด
- จุดยอดจุดหนึ่งของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่  $(-2, 6)$
  - จุดยอดของวงรี และไฮเพอร์โบลา (สองจุดที่ไกลกัน) ห่างกัน 7 หน่วย
  - แกนโทของวงรียาว 3 หน่วย
  - ความยาวของแกนเอก และแกนโทของวงรีต่างกัน 4 หน่วย
9. กำหนดให้  $A = \{x \mid 6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}\}$   
 $B = \{x \mid \log_2 \log_2 \log_3 (2x - 1) = 0\}$   
 ผลคูณของสมาชิกเซต A กับเซต B คือข้อใดต่อไปนี้
- 0
  - 1
  - 2
  - 3
  - 4
10. จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่  $A(3, 5, 2)$ ,  $B(1, -1, 6)$  และ  $C(-2, 1, 4)$
- $\sqrt{21}$
  - $3\sqrt{21}$
  - $5\sqrt{21}$
  - $7\sqrt{21}$
11. กำหนดให้  $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$  และ  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$  ข้อความในข้อใดต่อไปนี้ไม่จริง
- เวกเตอร์  $\vec{u} + 2\vec{v}$  ทำมุม  $30^\circ$  กับเวกเตอร์  $\vec{u} - 2\vec{v}$
  - เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์  $\vec{u} - 2\vec{v}$  คือ  $6\vec{i} + \vec{j}$
  - เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์  $\vec{u} + \vec{v}$  คือ  $-\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$
  - $|\vec{u} - \vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$
12. ถ้า  $f(x) = \sin x$  และ  $g(x) = \arcsin 2x + 2 \arcsin x$  แล้วค่าของ  $(f \circ g)(\frac{1}{3})$  คือข้อใดต่อไปนี้
- $\frac{4}{9}$
  - $\frac{2}{9}(1 + \sqrt{8})$
  - $4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{10}}{12}$
  - $\frac{2}{27}(7 + 2\sqrt{10})$
13. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมซึ่งมีตรงข้ามมุม  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  ยาว a, b, c  
 ถ้า  $(\sin A + \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B - \sin C) = 3 \sin A \sin B$  แล้ว  $\cos C$  มีค่าเท่าไร
- $\frac{1}{2}$
  - $\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - $\frac{\sqrt{2}}{2}$
  - 1
14. กำหนดให้สมการจุดประสงค์ P = 3x + y  
 อสมการข้อจำกัดคือ  $2x + 3y \leq 120$   
 $x + y \geq 10$   
 $y - x \leq 5$   
 $y - 2 \geq 0$   
 ถ้า a เป็นค่ามากที่สุด และ b เป็นค่าน้อยที่สุดตาม P แล้ว a - b เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- 158
  - 173
  - 89
  - 15
15. ให้  $Z_1 = -1 - \sqrt{3}i$  และ  $(z_2)^3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$  แล้ว ค่าของ  $Z_1^6 + (Z_2)^{27}$  คือข้อใดต่อไปนี้
- 31
  - 26
  - 63
  - 127
16. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง  $|4iz^{-1} + a\bar{z}| = 652$  ดังนั้น |z| มีค่าอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้
- $(\frac{1}{2}, 1]$
  - $(0, \frac{1}{2}]$
  - $(1, \frac{3}{2}]$
  - $(\frac{3}{2}, 2]$

17. มีเลข 8 จำนวนเป็นเลขบวก 6 จำนวน ซึ่งเป็นเลขคู่ 3 จำนวนจำนวนที่ 3 จำนวน และมีจำนวนลบ 2 จำนวน ซึ่งเป็นจำนวนคู่ 1 จำนวน จำนวนที่ 1 จำนวน ถ้าสุ่มตัวเลขดังกล่าวมา 4 จำนวนแล้ว ความน่าจะเป็นที่ผลคูณของเลขทั้งสี่จะมีค่าน้อยกว่า 0 และเป็นเลขคี่ มีค่าเท่ากับข้อใด

1.  $\frac{14}{70}$

2.  $\frac{10}{70}$

3.  $\frac{28}{70}$

4.  $\frac{1}{70}$

18. กอล์ฟโบหนึ่งมีลูกบอลสีขาว 3 ลูก สีแดง 4 ลูก และสีน้ำเงิน 5 ลูก ถ้าหยิบออกมาพร้อมกัน 2 ลูก แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอล 2 ลูกมีสีเหมือนกันเท่ากับข้อใด

1.  $\frac{1}{11}$

2.  $\frac{10}{66}$

3.  $\frac{19}{66}$

4. ทำให้เป็นอะ

19. พิจารณาข้อความ

ก.  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots + 19 \cdot 20 = 2,260$

ข. ถ้า  $a_n = \frac{2^{n+1} - 2^n}{1 + 2^{n+2}}$  แล้ว  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{4}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. และ ข. ถูก

2. ก. ถูก แต่ ข. ผิด

3. ก. ผิด แต่ ข. ถูก

4. ก. และ ข. ผิด

20. ให้ a เป็นจำนวนจริง

กำหนดให้  $f(x) = \begin{cases} \frac{3x - a}{\sqrt{3x - 3}}, & x > 3 \\ ax^2 - 6a, & x \leq 3 \end{cases}$

แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว  $f'(a)$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2

2. 4

3. 8

4. 10

21. กำหนดให้  $f(x) = \sqrt{3x + 1}$  ถ้า g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง  $f \circ g(x) = x^2 + 1$  ทุก  $x \in \mathbb{R}$  แล้ว  $f'(1) + g'(1)$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1.  $\frac{41}{12}$

2.  $\frac{35}{12}$

3.  $\frac{33}{4}$

4.  $\frac{39}{4}$

22. ถ้า a คือจำนวนจริงที่ทำให้พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $y = a^2 x^2 + 4ax + 10$  จาก  $x = 0$  ถึง  $x = 1$  มีค่าน้อยที่สุดแล้ว พื้นที่ที่น้อยที่สุดเป็นเท่าไร

1. 5

2. 7

3. 9

4. 11

23. จากตารางการแจกแจงความถี่ต่อไปนี้

ช่วงคะแนน	ความถี่
96 - 105	3
86 - 95	7
76 - 85	10
66 - 75	y
56 - 65	x
46 - 55	4

ถ้าข้อมูลชุดนี้มี  $Q_1 = 65.5$  และมีมัธยฐานเท่ากับ 75.5 แล้ว ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ของข้อมูลมีค่าเท่ากับข้อใด

1. 5

2. 10

3. 15

4. 20

24. กำหนดให้  $X_i$  เป็นคะแนนสอบวิชาสถิติของนักเรียนคนที่  $i$  เมื่อ  $i = 1, 2, 3, \dots, 99, 100$  ที่มีคะแนนเต็มเท่ากับ 100 คะแนน ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าฐานนิยม และค่ามัธยฐานของคะแนนเท่ากับ 70, 40 และ 60 ตามลำดับ ข้อความใดต่อไปนี้จริง

- $\sum_{i=1}^{100} |X_i - 60|$  มากกว่า  $\sum_{i=1}^{100} |X_i - 70|$
- $\sum_{i=1}^{100} (X_i - 70)^2$  มากกว่า  $\sum_{i=1}^{100} (X_i - 40)^2$
- การแจกแจงของคะแนนดังกล่าวเป็นเส้นโค้งเบ้ไปทางขวา
- ถ้าครูต้องการให้นักเรียนสอบได้ 60 คน จึงตัดสินว่านักเรียนผู้ใดสอบได้คะแนนตั้งแต่ 60 คะแนนขึ้นไปเป็นผู้สอบได้

25. กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง  $z$  ดังนี้

Z	0.35	0.71	1.00	2.00
A	0.136	0.261	0.341	0.477

ถ้ารายได้ของแรงงาน 2 กลุ่ม คือ กลุ่มคนงานหญิงและกลุ่มคนงานชาย แต่ละกลุ่มมีการแจกแจงปกติ และพบว่า กลุ่มคนงานหญิง มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 60 บาท ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 12 บาท กลุ่มคนงานชายมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 70 บาท ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 7 บาท ถ้าเปอร์เซ็นต์ของรายได้ของแรงงาน หญิงระหว่าง 36 บาท ถึง ฐานนิยม เท่ากับ เปอร์เซ็นต์ของรายได้ของแรงงาน ชาย ระหว่าง 63 ถึง  $X$  บาท แล้ว  $X$  มีค่าเท่าใด

- 63.45
- 72.45
- 68.45
- 78.45

ตอนที่ 2: ข้อสอบแบบเติมคำ มี 10 ข้อ ข้อ 1 – 5 ข้อละ 2 คะแนน

ข้อ 6 – 10 ข้อละ 3 คะแนน

1. ถ้า  $x$  เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดซึ่ง 9, 12 และ 15 หาร  $x$  ลงตัวแต่ 11 หาร  $x$  เหลือเศษ 7 แล้ว  $x$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

- 1400
- 1600
- 1800
- 2000

2. ถ้าเส้นกำกับของไฮเพอร์โบล่า  $16x^2 - 9y^2 + 32x + 36y = 164$  ตัดแกน  $x$  ที่จุด  $x_1, x_2$  แล้วระยะระหว่าง  $x_1, x_2$  ยาวกี่หน่วย

- 0.5
- 1
- 2
- 3

3. ถ้า  $\log_2 3 = 159$  แล้วค่าของ  $x$  ซึ่งสอดคล้องสมการ  $2^{2x+1} \cdot 3^{2x+2} = 12^{2x}$

- 2.09
- 2.25
- 2.75
- 3.00

4. กำหนดให้  $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ x & 0 & -1 \end{pmatrix}$  ถ้า  $C_{12}(A) = 4$  แล้ว  $\det(2A)$  มีค่าเท่าใด

- 15
- 16
- 17
- 18

5.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-3x+x^2} \right)$  มีค่าเท่าใด

- 0.25
- 0.55
- 1
- 1.25

6. กำหนดให้  $I$  เป็นเซตของจำนวนเต็ม ถ้า  $S = \{x \in I \mid 2x^2 - 9x - 26 \leq 0 \text{ และ } |1 - 2x| \geq 3\}$

แล้วผลบวกของสมาชิกของ  $S$  เท่ากับเท่าใด

- 14
- 15
- 16
- 17

7. กำหนดให้  $h(x) = |1 - x^5|$  และ  $g(x) = x^5$  ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันซึ่ง  $f(g(x)) = h(x)$  แล้ว  $f(5)$

มีค่าเท่าใด

1. 1

2. 2

3. 3

4. 4

8. ให้  $(x - 1 + i)$  และ  $(x + 2)$  เป็นตัวประกอบของฟังก์ชัน  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c(x - 3)$  หาค่า  $f(x)$  เหลือเศษเท่าใด

1. 17

2. 20

3. 23

4. 25

9. ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งมีสัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย 0.12 ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยเท่ากับ 6 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 แล้วสัมประสิทธิ์ของการแปรผันมีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 1.05

2. 0.05

3. 0.20

4. 0.25

10. ถ้าความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลชุดหนึ่งระหว่างตัวแปร  $x$  และ  $y$  มีกราฟเป็นเส้นตรง

โดยที่  $\sum_{i=1}^8 x_i = 32$ ,  $\sum_{i=1}^8 y_i = 16$ ,  $\sum_{i=1}^8 x_i y_i = 65$ ,  $\sum_{i=1}^8 x_i^2 = 140$ ,  $\sum_{i=1}^8 y_i^2 = 34$ , ถ้า  $x = 8$  แล้ว จะประมาณค่า  $y$  ได้เท่าใด

1. 1.33

2. 2.33

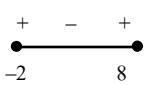
3. 1.75

4. 2.75

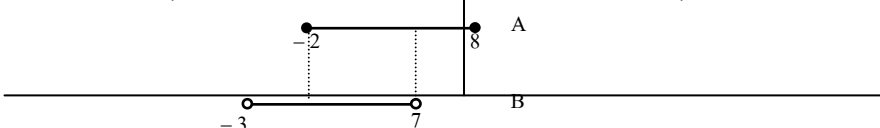
## เฉลย 14 คณิตศาสตร์ A-NET

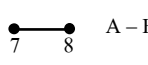
### ตอนที่ 1

1. ตอบ ข้อ 1 ข้อนี้ถือว่าง่ายมาก ๆ หวังว่า น้อง ๆ คงจะทำได้แน่ครับ

มาดูเซต A กัน  $x^2 - 6x - 16 \leq 0$       เซต B  $|2-x| < 5$   
 $(x-8)(x+2) \leq 0$   
  
 ดังนั้นเซต A = [2, 8]

$|x-2| < 5$   
 $-5 < x-2 < 5$   
 $-3 < x < 7$   
 ดังนั้นเซต B = (3, 7)





$A - B = [7, 8] = [a, b]$   
 ดังนั้น  $a + b = 7 + 8 = 1$

$|a - b| = |b - a|$   
 นะจ๊ะ

2. ตอบข้อ 4
3. ตอบข้อ 4
4. ตอบข้อ 3
5. ตอบข้อ 1
6. ตอบข้อ 3
7. ตอบข้อ 4
8. ตอบข้อ 3 ทำการจัดสมการไฮเพอร์โบล่า เพื่อหารายละเอียดพร้อมเขียนรูปหยาบๆ โยงไปสู่วงรี จึงจะเริ่มพิจารณาตัวเลือกได้

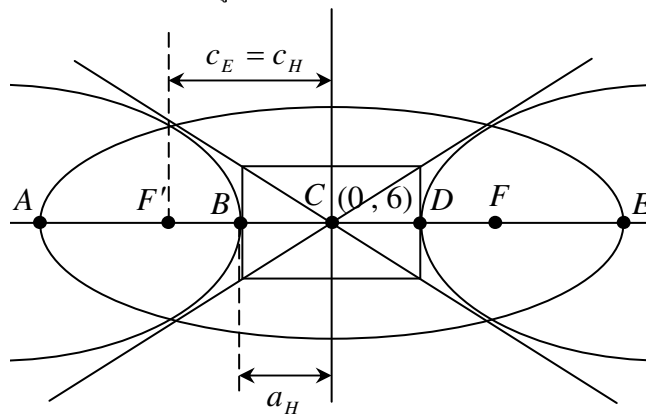
จากสมการไฮเพอร์โบล่า  $3x^2 - y^2 + 12y - 48 = 0$

$$3(x^2) - (y^2 - 12y + 6^2) = 48 - 36$$

หาร 12  $\frac{(x-0)^2}{4} - \frac{(y-6)^2}{12} = 1$

เทียบกับมาตรฐานไฮเพอร์โบล่า มีศูนย์กลาง =  $(h, k) = (0, 6)$ ,  $a = 2$ ,  $b = \sqrt{12}$ ,  $c = 4$

ได้ไฮเพอร์โบล่าที่มีแกนตามขวางขนานแกน  $x$  เขียนรูปได้ดังนี้



พร้อมกับวงรีตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมา เริ่มตรวจสอบได้แล้ว

ข้อ 1 ถูก

จุดยอดไฮเพอร์โบล่าต้องอยู่ทางด้านซ้ายกับขวาของศูนย์กลางด้วยระยะทาง 2 หน่วย

∴ จุดยอด B, D = (0 ± 2, 6) = (2, 6) กับ (-2, 6)

ข้อ 2-4 หา  $b_E$  ก่อนจากสมการวงรี ซึ่งเป็นวงรีที่มีแกนเอกขนานแกน  $x$  มีศูนย์กลาง= (h, k) = (0, 6) มี  $c_E = c_H = 4$ ,  $a_E^2 = b_E^2 + c_E^2 = b_E^2 + 16$  สมการคือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{b_E^2 + 16} + \frac{(y-6)^2}{b_E^2} = 1$$

วงรีผ่านจุด  $(3, \frac{18}{5})$  จะได้

$$\frac{9}{b_E^2 + 16} + \frac{(\frac{18}{5} - 6)^2}{b_E^2} = 1 \quad \text{-----(2)}$$

ถึงตรงนี้ นื่องๆก็พยายามแก้สมการหา  $b_E$  ได้แน่ แต่ถ้ามันมีไหวพริบด้วยการใช้ข้อ 3 เข้า มาช่วยก็จะเร็วขึ้นนะครับ ตรวจสอบเลขว่า $b_E = \frac{3}{2}$  หรือไม่ (แกนโทยาว 2b) แทนลงใน (2)

$$\frac{9}{\frac{9}{4} + 16} + \frac{(-\frac{12}{5})^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

$$\frac{36}{13} + \frac{4}{9} \left(\frac{144}{25}\right) = 1 \text{ เป็นเท็จ } \therefore \text{ข้อ 3 ผิด}$$

ถ้าต้องการรู้ต่อ ทำโดย

แต่ถ้าแทน  $b_E = 3$  หน่วยลงใน (1) จะเป็นจริงนั่นคือความยาวแกนโท =  $2b_E = 6$  หน่วย

$$\text{ความยาวแกนเอก} = 2a_E = 2(\sqrt{9+16}) = 10 \text{ หน่วย}$$

ดังนั้นความยาวแกนเอกยาวกว่าแกนโท =  $10 - 6 = 4$  หน่วย

$$\begin{aligned} \left| \text{จุดยอดวงรีกับจุดยอดไฮเพอร์โบล่าที่ใกล้กัน} \right| &= |AD| \text{ หรือ } |BE| \\ &= |AC| + |CD| \\ &= a_E + a_H \\ &= 5 + 2 = 7 \end{aligned}$$

9. ตอบข้อ 4

10. ตอบข้อ 2 วิธีทำ  $\vec{AB} = -2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$ 

$$\vec{AC} = -5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -6 & 4 \\ -5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = (-12 - 16)\vec{i} - (-4 + 20)\vec{j} + (8 - 30)\vec{k} \\ &= 4\vec{i} - 16\vec{j} - 22\vec{k} \end{aligned}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{16 + 256 + 484} = \sqrt{756} = 6\sqrt{21}$$

$$\text{พ.ท. } \triangle ABC = 3\sqrt{21}$$

11. ตอบข้อ 1 วิธีทำ กำหนด  $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$  และ  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$

1. ไม่จริง  $\therefore$

$$2\vec{u} + \vec{v} = 2(3\vec{i} - 4\vec{j}) + (\vec{i} + \vec{j}) = 7\vec{i} - 7\vec{j}$$

$$\vec{u} + 2\vec{v} = (3\vec{i} - 4\vec{j}) + 2(\vec{i} + \vec{j}) = 5\vec{i} - 2\vec{j}$$

$2\vec{u} + \vec{v}$  กับ  $\vec{u} + 2\vec{v}$  ทำมุม  $\theta$  กัน ดังนี้

$$\cos \theta = \frac{(7\vec{i} - 7\vec{j}) \cdot (5\vec{i} - 2\vec{j})}{|7\vec{i} - 7\vec{j}| |5\vec{i} - 2\vec{j}|}$$

$$= \frac{7 \times 5 + (-7)(2)}{\sqrt{7^2 + 7^2} \sqrt{5^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{49}{7\sqrt{2}\sqrt{29}} = \frac{7}{\sqrt{58}}$$

$$\text{แต่ } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \cos \theta \neq \cos 30^\circ$$

$$\therefore \theta \neq 30^\circ$$

นั่นคือ เวกเตอร์  $2\vec{u} + \vec{v}$  ทำมุมกับ  $30^\circ$  กับ  $\vec{u} + 2\vec{v}$  จึงไม่จริง

ดังนั้น ข้อ 1 เป็นคำตอบ

2. จริง

$$\vec{u} - 2\vec{v} = (3\vec{i} - 4\vec{j}) - 2(\vec{i} - \vec{j}) = \vec{i} - 6\vec{j}$$

$$(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (6\vec{i} - \vec{j}) = (\vec{i} - 6\vec{j}) \cdot (6\vec{i} - \vec{j})$$

$$= 6 \times 1 + 1(-6) = 0$$

แสดงว่าเวกเตอร์  $\vec{u} - 2\vec{v}$  ตั้งฉากกับ  $6\vec{i} + \vec{j}$  จริง

3. จริง  $\vec{u} + \vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{i} + \vec{j} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางซ้ำกับ  $\vec{u} + \vec{v}$  คือ  $\frac{(\vec{u} + \vec{v})}{|\vec{u} + \vec{v}|}$

$$\therefore \frac{(\vec{u} + \vec{v})}{|\vec{u} + \vec{v}|} = \frac{(4\vec{i} - 3\vec{j})}{|4\vec{i} - 3\vec{j}|}$$

$$= \frac{(4\vec{i} - 3\vec{j})}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{-4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \text{ จริง}$$

4. จริง  $\vec{u} - \vec{v} = (3\vec{i} - 4\vec{j}) - (\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} - 5\vec{j}$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = |2\vec{i} + 5\vec{j}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = |4\vec{i} - 3\vec{j}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25}$$

$$\therefore |\vec{u} - \vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$$



12. ตอบข้อ 4 วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 (\text{fog})\left(\frac{1}{3}\right) &= f\left(g\left(\frac{1}{3}\right)\right) \\
 &= f\left(\arcsin\frac{2}{3} + 2\arcsin\frac{1}{3}\right) \\
 &= \sin\left(\arcsin\frac{2}{3} + 2\arcsin\frac{1}{3}\right)
 \end{aligned}$$

$$\text{ให้ } \arcsin\frac{2}{3} = A$$

$$\therefore \sin A = \frac{2}{3}$$

$$\text{ให้ } \arcsin\frac{1}{3} = B$$

$$\therefore \sin B = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin\left(\arcsin\frac{2}{3} + 2\arcsin\frac{1}{3}\right) = \sin(A + 2B)$$

$$= \sin A \cos 2B + \cos A \sin 2B$$

$$= \sin A(1 - 2\sin^2 B) + \cos A \times 2\sin B \cos B$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)\left(1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + \sqrt{1 - \sin^2 A} \times 2\sin B \times \sqrt{1 - \sin^2 B}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{9}\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \times \frac{2}{3} \times \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{9}\right) + \sqrt{1 - \frac{4}{9}} \times \frac{2}{3} \times \sqrt{1 - \frac{1}{9}}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{9}\right) + \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$= \frac{14}{27} + \frac{2\sqrt{40}}{27}$$

$$= \frac{14 + 4\sqrt{10}}{27}$$

$$= \frac{2}{27}(7 + 2\sqrt{10})$$

13. ตอบข้อ 1 วิธีทำ จากกฎของ sine ให้

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$$

$$\therefore a = k \sin A, b = k \sin B, c = k \sin C$$

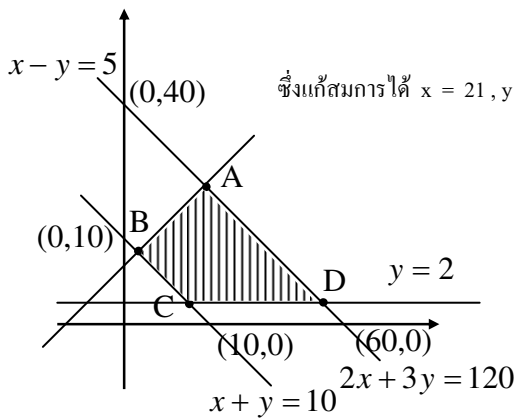
$$\sin A = \frac{a}{k}, \sin B = \frac{b}{k}, \sin C = \frac{c}{k}$$

$$\text{จากโจทย์ } (\sin A + \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B - \sin C) = 3 \sin A \sin B$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{k} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k}\right)\left(\frac{a}{k} + \frac{b}{k} - \frac{c}{k}\right) &= 3 \cdot \frac{a}{k} \cdot \frac{b}{k} \\ \frac{1}{k^2}(a+b+c)(a+b-c) &= \frac{1}{k^2}(3ab) \\ \therefore (a+b+c)(a+b-c) &= 3ab \\ \therefore C &= 60^\circ \\ \cos C &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

14. ตอบข้อ 3 ข้อ 1(เรื่องนี้ออกปีละ 1 ข้อ มาตลอดนะครับ)

วาดรูป



จุดมุมมี 4 จุด

จุด A เป็นจุดตัด  $2x + 3y = 100$  -----(1)

$y - x = 5$  -----(2)

$\therefore A(21, 26)$

จุด B เป็นจุดตัด  $x + y = 10$  .....(1)

$y - x = 5$  .....(2)

ซึ่ง  $B = \left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right)$  <ฝากคิดเองนิดนึงนะ>

จุด C  $x + y = 10$  แต่  $y = 2$

$\therefore C(8, 2)$

จุด D  $2x + 3y = 120$  แต่  $y = 2$

$\therefore D = (57, 2)$

นำ 4 จุดมุม แทนลง P

	$P = 3x + y$
(21, 26)	$P = 89$
$\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right)$	$P = 15 \rightarrow \min$
(8, 2)	$P = 26$
(57, 2)	$P = 173 \rightarrow \max$

$a = \max = 173$

$b = \min = 15$

$a - b = 173 - 15 = 158$

ตอบข้อ 3

15. ตอบข้อ 3 แนวคิด

ข้อนี้ใช้ ท.บ.คอมัวร์ เรื่องจำนวนเชิงซ้อนครับ

$$\begin{aligned}
 z_1 &= -1 - \sqrt{3}i \\
 &= 2 \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\
 &= 2 (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) \\
 z_1^6 &= 2^6 (\cos 1440^\circ + i \sin 1440^\circ) \\
 &= 64 (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) \\
 &= 64
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (z_2)^3 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \\
 &= \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ \\
 (z_2^3)^9 &= \cos (9 \times 60^\circ) + i \sin (9 \times 60^\circ) \\
 z_2^{27} &= \cos 540^\circ + i \sin 540^\circ \\
 z_2^{27} &= \cos (360^\circ \times 180^\circ) + i \sin (360^\circ \times 180^\circ) \\
 z_2^{27} &= -1
 \end{aligned}$$

$$z_1^6 + (z_2)^{27} = 64 - 1 = 63 \quad \text{ตอบ}$$

16. ตอบข้อ 1

$$\begin{aligned}
 |4iz^{-1} + 9\bar{z}| &= 6\sqrt{2} \\
 \left| \frac{4i}{z} + 9\bar{z} \right| &= 6\sqrt{2}
 \end{aligned}
 \quad \left[ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right] \quad \boxed{z^{-1} = \frac{1}{|z|}, z \neq 0}$$

$$\left| \frac{4i + 9z \cdot \bar{z}}{z} \right| = 6\sqrt{2}
 \quad \left[ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right] \quad \boxed{z \cdot \bar{z} = |z|}$$

$$\frac{|4i + 9z \cdot \bar{z}|}{|z|} = 6\sqrt{2}$$

$$|4i + 9|z|^2| = 6\sqrt{2}|z|
 \quad \left[ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right] \quad \boxed{|z| = \sqrt{(\text{ส่วนจริง})^2 + (\text{ส่วนจินตภาพ})^2}}$$

$$\sqrt{4^2 + (9|z|^2)^2} = 6\sqrt{2}|z|$$

$$16 + 81|z|^4 = 72|z|^2$$

ยกกำลัง 2 สองข้าง

$$81|z|^4 - 72|z|^2 + 16 = 0$$

$$(9|z|^2 - 4)^2 = 0$$

$$9|z|^2 - 4 = 0$$

$$|z|^2 = \frac{4}{9}$$

$$|z| = \frac{2}{3}$$

17. ตอบข้อ 4 แนวคิด เลือกเลข 4 ตัวจาก 8 ตัว ทำให้  $\binom{8}{4} = 70$  วิธี

เหตุการณ์ที่ผลคูณของเลข 4 ตัว คูณกันน้อยกว่า 0

และเป็นจำนวนคี่ คือ หยิบได้เลขคี่ทั้งหมด 4 ตัว ซึ่งมี 1 วิธี

$$\therefore \text{ความน่าจะเป็น} = \frac{1}{70} \quad (\text{ง่ายเนอะ})$$

18. ตอบข้อ 3 (ห้ามตอบข้อ 4 นะ)

บอกไว้ก่อนว่าโจทย์ หยาบของเนี่ย ออกทุกปีเลย!

$$\begin{aligned}
 \text{แนวคิด} \quad P \text{ (ได้สีเดียวกัน)} &= P(\text{ได้สีขาว 2}) + P(\text{ได้สีแดง 2}) + P(\text{ได้สีน้ำเงิน 2}) \\
 &= \frac{\binom{3}{2}}{\binom{12}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} \\
 &= \frac{3}{66} + \frac{6}{66} + \frac{10}{66} \\
 &= \frac{19}{66}
 \end{aligned}$$

19. ตอบข้อ 1

20. ตอบข้อ 3

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(ax)$	$f(3)$
$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left( \frac{3x-9}{\sqrt{3x}-3} \right)$ <p>แทนได้ <math>\frac{0}{0} \therefore</math> DIFF</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 10px;"> <math>\frac{3}{2\sqrt{3x}}</math> </div> <math>x=3 \rightarrow</math> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-left: 10px;">6</div> </div>	$  \begin{aligned}  &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax^2 - 6a) \\  &= 9a - 6a \\  &= 3a  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  &= a(3)^2 - 6a \\  &= 9a - 6a \\  &= 3a  \end{aligned}  $

ฟังก์ชันต่อเนื่อง “3 กรอบ ต้องเท่ากัน”

$$f(x) = 6 = 3a = 3a$$

$$a = 2$$

แทนค่า  $f(x) = 2x^2 - 12, \quad x \leq 3$

$$f'(x) = 4x, \quad x \leq 3$$

$$f'(a) = f'(2) = 8$$

21. ตอบข้อ 1 หมายถึง ข้อสอบ Calculus ปัจจุบันจะนิยมออกผสมกับฟังก์ชัน  $f \circ g, g \circ f$  ประจำเลขนะ

$$\begin{aligned}
 \text{แนวคิด} \quad \text{จาก} \quad f(x) &= \sqrt{3x+1} \\
 f \circ g(x) &= x^2 + 1 \\
 \text{จะได้} \quad g(x) &= \frac{(x^2+1)^2 - 1}{3} = \frac{1}{3}(x^2+1)^2 - \frac{1}{3} \\
 f'(x) + g'(x) &= \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} + \frac{2}{3}(x^2+1)(2x) \\
 f'(1) + g'(1) &= \frac{3}{4} + \frac{8}{3} = \frac{41}{12}
 \end{aligned}$$

## 22. ตอบข้อ 2 แนวคิด

$$\begin{aligned}
 y &= a^2 x^2 + 4ax + 10 \\
 \text{พื้นที่ } A &= \int_0^1 (a^2 x^2 + 4ax + 10) dx \\
 &= \left( a^2 \frac{x^3}{3} + 2ax^2 + 10x \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{a^2}{3} + 2a + 10 \\
 \therefore \text{สมการ } A &= \frac{a^2}{3} + 2a + 10 \\
 \text{หาค่าน้อยสุด } A' &= \frac{2a}{3} + 2 = 0 \\
 2a &= -6 \\
 a &= -3 \\
 \therefore \text{พื้นที่น้อยสุด คิดจาก } a &= -3
 \end{aligned}$$

$$\text{ซึ่งคือ } A = \frac{(3)^2}{3} + 2(3) + 10 = 7$$

## 23. ตอบข้อ 2

ปรับตารางให้คุ้นเคยก่อนนะ

ช่วง	f	ความถี่สะสม
46-55	4	4
56-65	x	4+x
66-75	y	4+x+y
76-85	10	14+x+y
86-95	7	21+x+y
96-105	3	24+x+y
	24+x+y	

$$\begin{aligned}
 Q_1 &\text{ ตรงกับตำแหน่งที่ } \frac{1}{4}(n) \\
 &= \frac{1}{4}(24+x+y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Med} &\text{ ตรงกับตำแหน่งที่ } \frac{1}{2}(n) \\
 &= \frac{1}{2}(24+x+y)
 \end{aligned}$$

$$Q_1 = 65.5 \text{ บังเอิญ บังเอิญ ตรงกับขอบบนของชั้น } 56-65$$

$$\therefore \text{ความถี่สะสม } 4+x = \frac{1}{4}(24+x+y) \quad \dots\dots\dots(\text{ลึกลับ})$$

$$16+4x = 24+x+y$$

$$3x-y = 8 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{Med} = 75.5 \text{ บังเอิญตรงขอบบนชั้น } 66-75 \text{ (เหมือนเดิมเลย)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ความถี่สะสม } 4+x+y &= \frac{1}{2}(24+x+y) \\ 8+2x+2y &= 24+x+y \\ x+y &= 16 \quad \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

แก้ (1) และ (2) ได้  $x = 6, y = 10 \therefore N = 40$  จำนวน

ต่อไปหา  $Q_3$  ซึ่งตรงกับตำแหน่ง  $\frac{3}{4}(N) = \frac{3}{4}(40) = 30$

ซึ่งอยู่ในชั้นที่ 4 (ตำแหน่งสุดท้ายของชั้นอีกแล้ว)

$\therefore Q_3$  ตรงขอบบน คือ  $Q_3 = 85.5$

โจทย์ถาม ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์

$$\begin{aligned} \therefore \text{Q.D.} &= \frac{Q_3 - Q_1}{2} \\ &= \frac{85.5 - 65.5}{2} = 10 \end{aligned}$$

24. ตอบข้อ 3 วิธีทำ  $\bar{X} = 70, Mo =$  ฐานนิยม  $= 40$

Med = มัชยฐาน = 60

1. ไม่จริง  $\therefore \sum_{i=1}^N |X - \text{มัชยฐาน}| \leq \sum_{i=1}^N |X - a|$  เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนจริงใด ๆ

มัชยฐาน = 60  $\therefore \sum_{i=1}^{100} |X_i - 60| < \sum_{i=1}^{100} |X_i - 70|$

2. ไม่จริง  $\therefore \sum_{i=1}^N (X - \bar{X})^2 \leq \sum_{i=1}^N (X - a)^2$  เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนจริงใด ๆ

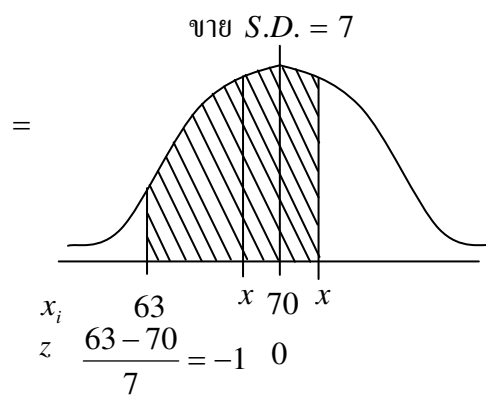
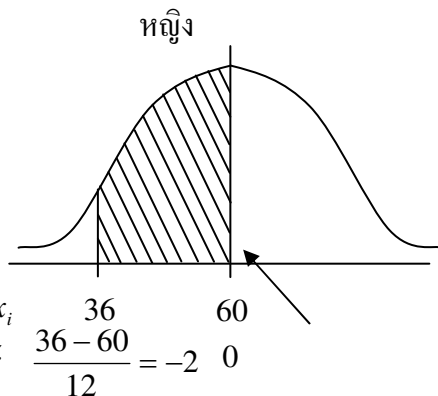
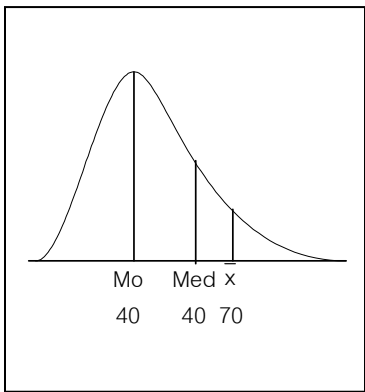
$\bar{X} = 70 \therefore \sum_{i=1}^{100} (X_i - 70)^2 < \sum_{i=1}^{100} (X_i - 40)^2$

3. จริง  $Mo < Med < \bar{X}$   
 $\therefore$  การแจกแจงเป็นเส้นโค้งเบ้ขวา

4. ไม่จริง เพราะว่า ค่ามัชยฐาน = 60 คะแนน

แสดงว่ามีคนได้คะแนนมากกว่าหรือเท่ากับ 60 คะแนน มี 50 คน ไม่ใช่ 60 คน

25. ตอบข้อ 3 ใช้พื้นที่ใต้โค้งปกติช่วยซึ่งพื้นที่ใต้โค้งปกติคือ เปอร์เซนต์รายได้นั้นเองโดย



ตำแหน่ง  $\bar{x}$  และฐานนิยมอยู่ที่เดียวกัน ใช่ไหม

งานแรก หาเปอร์เซ็นต์รายได้ของกลุ่มหญิงก่อน

$$\begin{aligned} P(36 < x_i < 60) &= P(-2 < z < 0) \\ &= P(0 < z < 2) \quad (\text{เปิดตาราง } z \text{ พ.ท.}) = 0.477 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ซึ่งโจทย์กำหนด } P(36 < x_i < 60) &= P(-2 < z < 0) \\ &= P(0 < z < 2) \quad (\text{เปิดตาราง } z \text{ หาพ.ท.}) = 0.477 \end{aligned}$$

ซึ่งโจทย์กำหนด  $P(36 < x_i < 60)$  ของหญิง  $= P(36 < x_i < x)$  ของชาย ซึ่งทราบแล้วว่ามีค่าเท่ากับ 0.477 เพียงแต่ว่าตำแหน่ง  $x$  น่าจะอยู่ตรงไหน อยู่ตรงไหน อยู่ซ้ายหรือขวาของ  $\bar{x}$  ดี นื่องๆต้องหาพื้นที่ของ  $P(36 < x_i < \bar{x})$  ก่อนว่ามีค่าน้อยกว่าหรือมากกว่า 0.477 ถ้าได้พื้นที่ที่น้อยกว่า แสดงว่า  $x$  อยู่ทางขวามือของ  $\bar{x}$  ทำนองเดียวกันถ้าค่านั้นมากกว่า 0.477 ถ้าได้พื้นที่ที่น้อยกว่า แสดงว่า  $x$  อยู่ทางขวามือของ  $\bar{x}$  ทำนองเดียวกันถ้าค่านั้นมากกว่า 0.477 แสดงว่า  $x$  อยู่ทางซ้ายมือของ  $\bar{x}$

$$\begin{aligned} \text{หา} \quad P(63 < x_i < \bar{x}) &= P(-1 < z < 0) \\ &= P(0 < z < 1) &= 0.341 \end{aligned}$$

แสดงว่า  $x$  ต้องอยู่ทางขวามือของ  $\bar{x}$  หา  $x$  ได้ด้วย

$$\begin{aligned} P(63 < x_i < x) \text{ ชาย} &= P(36 < x_i < 60) \text{ หญิง} \\ P(63 < x_i < \bar{x}) + P(\bar{x} < x_i < x) &= 0.477 \\ 0.341 + P(0 < z < z_i) &= 0.477 \\ P(0 < z < 0.35) &= 0.477 - 0.341 = 0.136 \quad \text{นำไปเปิดตารางหา } z \end{aligned}$$

$\therefore$  ตำแหน่ง  $x$  คำนวณ  $z$  ได้ 0.35 ดังนี้

$$z = \frac{x_i - \bar{x}}{\text{SD}}$$

$$0.35 = \frac{x - 70}{7}$$

$$x = 70 + 2.45 = 72.45$$

## ตอนที่ 2

1. คอบข้อ 3. 1800
2. คอบข้อ 4. 3
3. คอบข้อ 1. 2.09
4. คอบข้อ 2. 16
5. คอบข้อ 3. 1
6. คอบข้อ 4. 17
7. คอบข้อ 3. 4
8. คอบข้อ 1. 25
9. คอบข้อ 3. 0.2
10. คอบข้อ 2. 2.33