



ข้อสอบแข่งขันโครงการสรรหานักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์

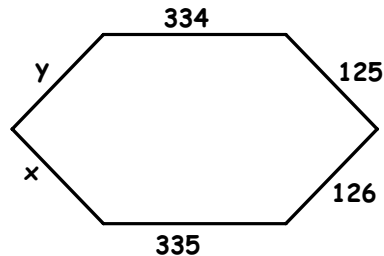
รอบที่ 2 สอบวันที่ 6 กุมภาพันธ์ 2546 เวลา 13.00 - 14.00 น.

1. กำหนดให้
$$\frac{\sqrt{xy - yz - zx} + \sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 3x^2yz + 3xy^2z + 2xyz^2}}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz^2 - x^2yz - xy^2z} + \sqrt{(y+x)z - xy}} = \tan \theta$$

และ
$$\frac{11xy^2z^3 + 7x^2y^3z + 3x^3yz^2}{179xy + 37x^2y + 31xz} = 9$$

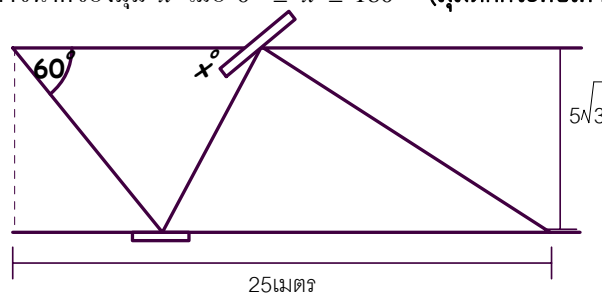
จงหาค่าของ $\sec^2 \theta - 1$

2. ให้ $ABCDEF$ เป็นรูปหกเหลี่ยมมุมเท่าที่มีความยาวด้านดังรูป
 จงหาค่าของ $x - y$



3. ลูกเต๋าที่ไม่เที่ยงตรงลูกหนึ่ง มีโอกาสออกเลข n เป็น n เท่าของเลข 1 เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
 โยนลูกเต๋าลูกนี้ พร้อมกับลูกเต๋าที่เที่ยงตรง
 จงหา โอกาสที่ผลรวมของแต้มที่หงายบนหน้าของลูกเต๋าทั้งสองลูก เป็นจำนวนที่หารด้วย 4 ลงตัว

4. จากรูป จงหาขนาดของมุม x เมื่อ $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ (มุมตกกระทบเท่ากับมุมสะท้อน)





5. กำหนดลำดับ 7, 9, 19, 39, 71, 117, 179, ...

จงหา พจน์ที่ 13 ของลำดับ และความสัมพัทธ์ของลำดับ

6. จงหาค่าของ $\sqrt{x^3 + y^3 \sqrt{x^3 + y^3 \sqrt{x^3 + y^3 \sqrt{x^3 + \dots}}}}$ เมื่อ $x, y \geq 0$

7. ถ้าวันนี้ (6 ก.พ. 46) ได้ปรับเวลาให้ตรง ณ เวลา 12.00 น. นาฬิกาเดินช้าไปวันละ 12 นาที

ถ้าปีหน้า (6 ก.พ. 47) คุณมาที่นี่อีกครั้ง เมื่อเวลาจริง 8.00 น. เจ็มนาฬิกาจะทำมุมกันเท่าไร สมมติว่า นาฬิกาเดินตลอด และไม่ปรับเวลาใหม่ (ตอบเป็นมุมที่กางน้อยกว่า 180 องศา)

8. สนามหญ้าแห่งหนึ่งมีหญ้าออกสม่ำเสมอ ถ้าใช้วัว 60 ตัว จะกินหญ้าหมดในเวลา 60 วัน หรือวัว 80 ตัว กินหญ้าหมดในเวลา 80 วัน

ถ้าให้วัวกินหญ้า 4 วัน แล้วหยุด 1 วัน ทำเช่นนี้เรื่อยๆ จนครบ 34 วัน หญ้าหมดพอดี ถามว่า มีวัวกี่ตัว

9. จงหา จำนวนของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่มีผลบวกของความยาวด้านเท่ากับ 113 นิ้ว และความยาวด้านเป็นจำนวนเต็ม





10. มีลูกกอล์ฟอยู่ 3 กล่อง A, B, C

นำลูกกอล์ฟ 17 ลูก จากกล่อง A ไปใส่กล่อง B

นำลูกกอล์ฟ 9 ลูก จากกล่อง B ไปใส่กล่อง C

นำลูกกอล์ฟ 6 ลูก จากกล่อง C ไปใส่กล่อง A

ในที่สุดทั้งสามกล่องมีลูกกอล์ฟเท่ากัน ถามว่า เดิมกล่อง A มีลูกกอล์ฟกี่ลูก ถ้ามีลูกกอล์ฟน้อยที่สุด

11. จงหาผลคูณของ $\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} \times \dots \times \frac{9999}{10000}$

12. เส้นส่วนสูง \overline{AP} , \overline{BQ} , \overline{CR} ถูกวาดใน $\triangle ABC$ และตัดกันที่จุด H (เส้นส่วนสูงของสามเหลี่ยมตัดกันที่จุดเดียว) สมมติ $AH = BC = x$

จงหา รัศมีวงกลมล้อมรอบ $\triangle RPQ$ กำหนดให้ $RP = y$, $PQ = z$ (ตอบในเทอมของ x , y , z)

13. จงแก้ระบบสมการ

ให้ a , b , c , d เป็นจำนวนจริงบวก หรือ 0

$$a^2 + b^2 = 5$$

$$c^2 + d^2 = 5$$

$$ac + bd = 5$$

$$ac - bd = 3$$





14. มีลูกเหล็ก 5 ลูก

เมื่อชั่งชั้นที่ 1 กับชั้นที่ 2 จะมีน้ำหนัก 12 กิโลกรัม

ชั้นที่ 2 กับชั้นที่ 3 จะมีน้ำหนัก 13.5 กิโลกรัม

ชั้นที่ 3 กับชั้นที่ 4 จะมีน้ำหนัก 11.5 กิโลกรัม

ชั้นที่ 4 กับชั้นที่ 5 จะมีน้ำหนัก 8 กิโลกรัม

ชั้นที่ 1 กับชั้นที่ 3 กับชั้นที่ 5 จะมีน้ำหนัก 16 กิโลกรัม

จงหาว่า แต่ละชั้นหนักกี่กรัม

15. เอกเป็นประธานชมรมคณิตศาสตร์ เขาอยู่ปี 4 และมีกรรมการอีก 3 คน อยู่ปี 1, ปี 2 และปี 3

ทั้งสี่นั่งประชุมรอบโต๊ะกลม โดยเอกนั่งทางซ้ายของแพร์ โจนั่งอยู่ทางขวาของนักศึกษาปี 3 แน่นซึ่งไม่ใช่ชั้นที่ศึกษาปี 2 นั่งตรงข้ามกับแพร์

จงหาว่า ใครเป็นนักศึกษาปีไหน และนั่งโต๊ะอย่างไร

16. สมการ $x^2 - 14x + k = 0$ โดยที่ k เป็นจำนวนเต็มบวก มีรากเป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน

แทนด้วย p, q

จงหา ค่าของ $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ (ตอบเป็นค่าคงที่)

17. จงหาจำนวนเต็มบวก c ทั้งหมดที่ทำให้สมการ $(m^2 + 1)(n^2 + 1) = (cmn + 1)^2 + 1$

มีจำนวนคำตอบ (m, n) ที่เป็นจำนวนเต็มบวก เป็นอนันต์



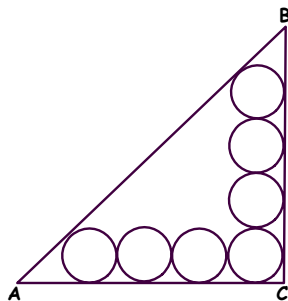


18. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ จุด P เป็นจุดภายในสามเหลี่ยม ซึ่งทำให้ $\widehat{PBC} = \widehat{PCA} < \widehat{PAB}$
เส้นตรง PB ตัดวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC ที่ B และ E
เส้นตรง CE ตัดวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม APE ที่ E และ F
จงหา อัตราส่วนของพื้นที่สี่เหลี่ยม $APEF$ ต่อพื้นที่สามเหลี่ยม ABP ($AB = c, BC = a, AC = b$)

ตอบในเทอมของ a, b, c

19. เมือง TU ใช้เหรียญ 3 แบบ แต่ละเหรียญมีมูลค่าเป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งแตกต่างกัน
ยอดมีเหรียญ TU 4 เหรียญ คิดเป็นเงินไทย 28 บาท
เพชรมีเหรียญ TU 5 เหรียญ คิดเป็นเงินไทย 21 บาท
แต่ละคนมีเหรียญ TU ทั้งสามแบบ เมื่อคิดเป็นเงินไทยแล้ว เหรียญ TU ทั้ง 3 แบบ มีมูลค่ารวมกันที่บาท

20. วงกลมเล็กทุกรูป มีรัศมี 1 หน่วย และมุม C เป็นมุมฉาก วงกลมแนบในสามเหลี่ยม ABC มีรัศมีเท่าไร



วันที่สิบแปด เดือนแปด ร.ศ.สองสองสาม