ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ครั้งที่ 39 ประเทศไต้หวัน

วันที่ 15 กรกฎาคม 2541

1. ในรูปของสี่เหลี่ยมนูน $ABCD$ เส้นทแยงมุม AC และ BD ตั้งฉากกัน แต่ด้าน AB และ DC ที่อยู่ตรงข้ามกัน ไม่ขนานกัน สมมุติว่า จุด P ซึ่งเป็นจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่ง และตั้งฉากด้าน AB และ DC อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$

จงพิสูจน์ว่า $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบได้ ก็ต่อเมื่อ รูปสามเหลี่ยม ABP และ CDP มีพื้นที่เท่ากัน

2. ในการแข่งขันครั้งหนึ่ง มีผู้เข้าแข่งขัน a คน และมีกรรมการ b คน เมื่อ $b \geq 3$ เป็นจำนวนเต็มคี่

ในการแข่งขัน กรรมการแต่ละคนตัดสินผู้เข้าแข่งขันแต่ละคนว่า “ผ่าน” หรือไม่ก็ “ตก”

สมมุติว่า k เป็นจำนวนที่มีสมบัติว่า ผลการตัดสินของกรรมการสองคนใดๆ เหมือนกันทุกประการ สำหรับผู้เข้าแข่งขันจำนวนอย่างมาก k คน

จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

3. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ

ให้ $d(n)$ แทนจำนวนของตัวหารที่เป็นบวกของ n (ซึ่งรวมทั้ง 1 และ n ด้วย)

จงหาพร้อมพิสูจน์ จำนวนเต็มบวก k ทั้งหมด ที่มีสมบัติว่า มีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

เวลาที่ใช้สอบ : 4 ชั่วโมง 30 นาที

แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 7 คะแนน

วันที่ 16 กรกฎาคม 2541

4. จงหาพร้อมพิสูจน์ คู่อันดับ (a, b) ของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด ที่ทำให้ $ab^2 + b + 7$ หาร $a^2b + a + b$ ได้ลงตัว

5. กำหนดให้ I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม ABC
ให้วงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม ABC นี้ สัมผัสด้าน BC, CA และ AB ที่จุด K, L และ M ตามลำดับ
ให้เส้นตรงที่ผ่านจุด B และขนานกับด้าน MK ตัดกับเส้นตรง LM และ LK ที่จุด R และ S ตามลำดับ
จงพิสูจน์ว่า $\angle RIS$ เป็นมุมแหลม

6. พิจารณาฟังก์ชัน f ทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันจาก N ไป N เมื่อ N คือเซตของจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$f(t^2 \cdot f(s)) = s(f(t))^2 \quad \text{สำหรับทุก } s, t \in N$$

จงหาพร้อมพิสูจน์ ค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของ $f(1998)$

เวลาที่ใช้สอบ : 4 ชั่วโมง 30 นาที
แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 7 คะแนน