



# โครงการส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐาน วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ ภาษา (ร่วม)

แบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์รอบวันที่ 9 กันยายน 2550

ตอนที่หนึ่ง ชุดเลขคณิต จำนวน 10 ข้อ (ข้อ 1 - ข้อ 10)

1. จงหาจำนวนเต็มในปีพ.ศ. 2550 ซึ่งวันที่ 13 ของเดือนนั้นเป็นวันศุกร์  
(กำหนดให้วันที่ 1 มกราคม 2550 ตรงกับวันจันทร์)

2. จงหาจำนวนเต็มบวก  $n > 2$  ที่น้อยที่สุดที่ทำให้  $\frac{n-2}{n^2+13}$  ไม่เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

3. ให้  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$f(n) = n^3 \text{ และ } g(n) = f(n+1) - f(n)$$

จงหาค่าของ  $(1/10)(g(0) + g(1) + g(2) + \dots + g(9))$

4. ให้  $N = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 20 \cdot 20!$

จงหาผลบวกของจำนวนเฉพาะทุกจำนวนที่เป็นตัวประกอบของ  $N + 1$

5. ให้  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนด  $s(n)$  แทนผลบวกของเลขโดดทุกจำนวนที่เขียนแทน  $n$

จงหาผลบวกของจำนวนเต็มบวก  $n$  ทุกจำนวนที่สอดคล้องกับ  $n - s(n) = 666$

6. กำหนดประพจน์ “มีจำนวนเต็มบวก  $n$  ซึ่งสำหรับทุก  $i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$   $n$  มีตัวหารที่มีหลักทศนิยมเป็น  $i$ ”

จงหาจำนวนเต็มบวก  $n$  ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ประพจน์มีค่าความจริงเป็นจริง





7. จงหาจำนวนเต็มบวก  $n$  ที่สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

(1)  $n \leq 50,000$

(2) ในบรรดาจำนวนตั้งแต่ 2 ถึง 13 มีเพียง 2 จำนวนที่เรียงต่อเนื่องกันเท่ากันที่หาร  $n$  ไม่ลงตัว

8. ให้  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนด  $P(n) =$  ผลคูณของตัวประกอบที่เป็นบวกทั้งหมดของ  $n$

เช่น  $P(2) = 1 \times 2 = 2$ ,  $P(6) = 1 \times 2 \times 3 \times 6 = 36$  เป็นต้น

จงหาจำนวนเต็มบวก  $n$  ที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องกับ  $P(n) = n^{10}$

9. ให้  $m, n$  เป็นจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องกับ  $\frac{19}{94} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$

จงหาค่าของ  $m + n$

10. ให้  $N$  เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนด  $d(N) =$  เซตของเลขโดดที่เขียนแทน  $N$

เช่น  $d(12345) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $d(10110) = \{0, 1\}$ ,  $d(22222) = \{2\}$  เป็นต้น

จงหาจำนวนเต็มบวก  $N$  ที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องกับสมบัติทุกข้อต่อไปนี้

(1)  $10000 < N < 99999$

(2)  $10000 < 2N < 99999$

(3)  $d(N) \cup d(2N) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

**ตอนที่สอง ชุดฝึกคณิต จำนวน 10 ข้อ (ข้อ 11 - ข้อ 20)**

11. ให้  $x$  เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ  $2^{16^x} = 16^{2^x}$

จงหาค่าของ  $3x$

12. ให้  $a, b$  เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ  $a + b = 1$  และ  $a^3 + b^3 = 4$

จงหาค่าของ  $a^4 + b^4$





13. จงหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน  $f$  ที่กำหนดโดย

$$f(x) = (x - 3)^2 + (x - 5)^2 + (x - 7)^2 + (x - 9)^2 - (x - 4)^2 - (x - 8)^2$$

14. จงหาค่าของ  $\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 180^\circ$

15. ให้  $x, y$  เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ

$$x + y + \sqrt{x + y} = 72$$

$$x - y - \sqrt{x - y} = 30$$

จงหาค่าของ  $\sqrt{x^2 - y^2}$

16. ให้  $x$  เป็นจำนวนเต็ม กำหนด  $[x]$  แทนจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ  $x$

และให้  $\{x\} = x - [x]$

ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย  $f(x) = \{5x/2\}$  และ  $X = \{x \in [0, 1] / f(f(f(x))) = 0\}$

จงหาจำนวนสมาชิกของ  $X$

17. จงหา  $(x, y)$  ทุกๆ จุดที่สอดคล้องกับระบบสมการ

$$\frac{4}{x} + \frac{5}{y^2} = 12$$

$$\frac{3}{x} + \frac{7}{y^2} = 22$$

18. ให้  $x, y$  เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ  $(4x^2 + 6x + 4)(4y^2 - 12y + 25) = 28$

จงหาค่าของ  $2y - 4x$





19. ให้  $x, y, z$  เป็นจำนวนจริงบวก ที่สอดคล้องกับ

$$x + y + xy = 8$$

$$y + z + yz = 15$$

$$z + x + zx = 35$$

จงหาค่าของ  $x + y + z + xyz$

20. ให้  $a > 0$  เป็นคำตอบของสมการ  $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = x$

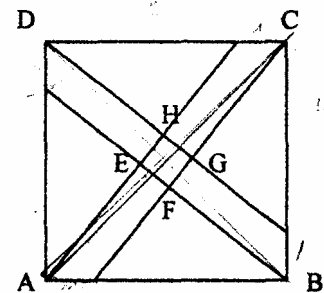
จงหาจำนวนเต็มบวกแล้วจำนวนที่อยู่ใกล้  $a$  มากที่สุด

**ตอนที่สาม ชุดเรขาคณิต จำนวน 10 ข้อ (ข้อ 21 – ข้อ 30)**

21. ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ 25 ตารางหน่วย

จากรูป ถ้า EFGH เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ 1 ตารางหน่วย

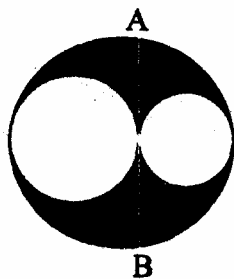
จงหาความยาวของ AE



22. จากรูป ให้ AB เป็นเคอร์ตของวงกลม และสัมผัสสองวงกลมเล็ก ณ จุดที่วงกลมเล็กทั้งสองสัมผัสกัน

ถ้า AB ยาว 8 หน่วย และพื้นที่ในส่วนของแรเงา

เท่ากับ  $p$  ตารางหน่วย จงหาค่าของ  $p/\pi$



23. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มี  $\angle BAC = 90^\circ$  เส้นตรง AD ตั้งได้ฉากกับด้าน BC

ทำให้ AD ยาวเท่ากับ 24 นิ้ว

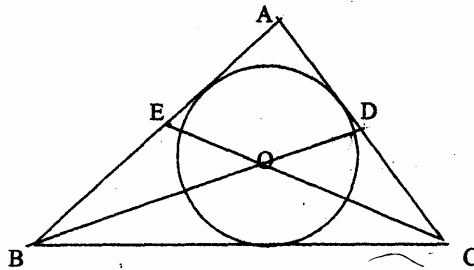
ถ้าความยาวเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยมเท่ากับ 120 นิ้วแล้ว พื้นที่สามเหลี่ยม ABC เท่ากับกี่ตารางนิ้ว





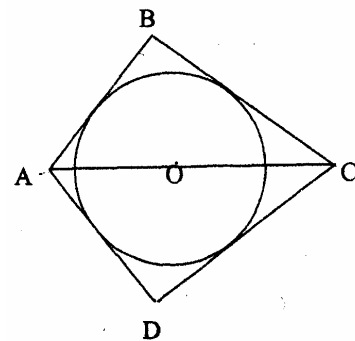
24. กำหนดวงกลมในระนาบ  $XY$  มีสมการคือ  $x^2 + y^2 = 1$  วงกลมตัดแกน  $X$  ทางด้านขวาที่จุด  $P$  ส่วนของเส้นตรง  $BC$  สัมผัสวงกลมที่จุด  $P$  ทำให้  $|OB| = |OC| = 2$  หน่วย จากจุด  $B$  และจุด  $C$  ลากเส้นสัมผัสวงกลมไปพบกันที่จุด  $A$  แล้ว พื้นที่สามเหลี่ยม  $ABC$  เท่ากับกี่ตารางหน่วย

25. กำหนดให้วงกลมที่มีจุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางแนบในสามเหลี่ยม  $ABC$  ดังรูป  $BD$  ตัดกับ  $CE$  ที่จุด  $O$

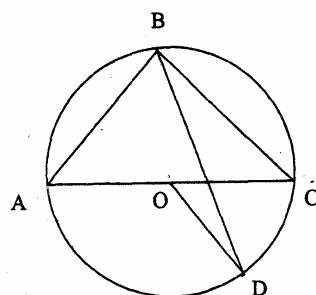


ถ้าขนาดของมุม  $BDA$  เท่ากับ  $76$  องศา และขนาดของมุม  $CEA$  เท่ากับ  $65$  องศา แล้ว ขนาดของมุม  $BAC$  เท่ากับกี่องศา

26. สี่เหลี่ยมรูปว่าว  $ABCD$  มี  $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$   
 $|AB| = |AD| = 15$  และ  $|BC| = |DC| = 20$   
 ถ้าวงกลม  $O$  เป็นวงกลมที่แนบในรูปสี่เหลี่ยม  
 แล้ว รัศมีของวงกลม  $O$  เท่ากับกี่หน่วย

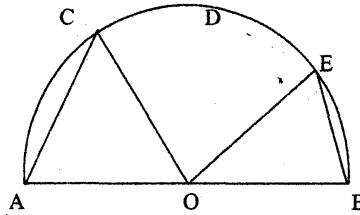


27. กำหนดวงกลม  $O$  มี  $AOC$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง มี  $\angle BAC = 40^\circ$  และ  $\angle CBD = 30^\circ$  ดังรูป ขนาดของมุม  $BDO$  เท่ากับกี่องศา





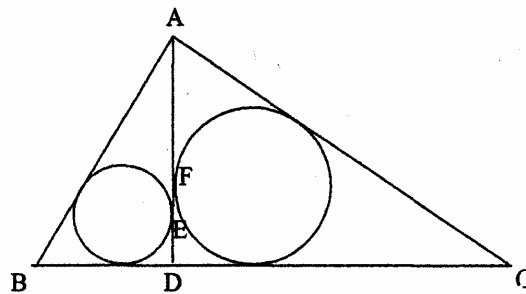
28. ใ้รูปครึ่งวงกลม มี O เป็นจุดศูนย์กลาง และ AB เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง



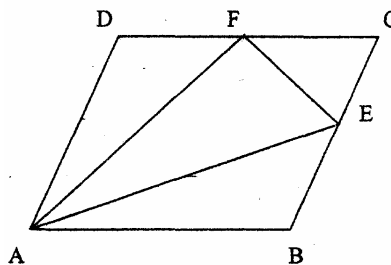
ถ้า  $\angle OAC = 63^\circ$  จุด D และจุด E แบ่งส่วนโค้ง CB ออกเป็นสามส่วนเท่าๆ กัน  
 แล้ว ขนาดของมุม OBE เท่ากับกี่องศา

29. สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากมี  $\angle BAC = 90^\circ$  เส้นตั้งฉาก AD ยาวเท่ากับ 12 นิ้ว  
 ทำให้ BD ยาวเท่ากับ 5 นิ้ว

ถ้าวงกลมแนบในสามเหลี่ยม ABD และวงกลมแนบในสามเหลี่ยม ADC สัมผัสด้าน AD ที่จุด E และ F  
 ตามลำดับแล้ว EF ยาวกี่นิ้ว



30. ใ้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จุด E และ F เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC และ CD ตามลำดับ  
 แล้ว พื่นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นกี่เท่าของพื่นที่รูปสามเหลี่ยม AEF



วันที่รับแจ้ง เดือนเก้า พอดสองงน้าน่าศูนย์

