



สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์

ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ประจำปีการศึกษา 2546

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ตอนที่ 1 ข้อละ 2 คะแนน

1. เอกภพสัมพัทธ์ในข้อใดที่ทำให้ประพจน์ต่อไปนี้มีความจริงเป็นเท็จ

$$\forall x[|x^2 + 2x + 3| \geq 5x + 7] \rightarrow \exists x[3 + \log_{\frac{1}{2}} x < 0]$$

ก. (0, 3]

ข. (-5, 3]

ค. [4, 7)

ง. [5, 9]

2. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ประพจน์ $[(p \rightarrow q) \vee (q \wedge \sim q)] \rightarrow [(\sim p \vee q) \wedge (r \vee \sim r)]$ เป็นสัจนิรันดร์

(2) ประพจน์ $(p \vee \sim q) \rightarrow (r \wedge q)$ สมมูลกับ $(\sim p \vee r) \wedge q$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) และ (2) เป็นจริง

ข. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง

ค. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง

ง. ข้อ (1) และ (2) เป็นเท็จ

3. ผลบวกของรากของสมการ $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{1}{2}$

ข. 1

ค. $\frac{3}{2}$

ง. 3

4. ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก

ถ้า $2x = a - ca^{-1}$ และ $2y = b - cb^{-1}$ แล้ว ค่าของ $xy + \sqrt{(x^2 + c)(y^2 + c)}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{1}{2}(ab + ca^{-1}b^{-1})$

ข. $\frac{1}{2}(ab + c^2a^{-1}b^{-1})$

ค. $ab + ca^{-1}b^{-1}$

ง. $ab + c^2a^{-1}b^{-1}$



5. ให้ $r = \{(x, y) \in R \times R^+ / 9y^2 - 4x^2 + 8x - 36y - 4 = 0\}$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $D_r - R_r = (-\infty, 4)$

(2) r เป็นฟังก์ชัน

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) และ (2) เป็นจริง

ข. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง

ค. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง

ง. ข้อ (1) และ (2) เป็นเท็จ

6. ถ้า $0 < x < 2\pi$ แล้ว ผลบวกของรากของสมการ

$$4\sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x \cdot \cos x + (3 - \sqrt{3})\cos^2 x = 3$$

เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{23\pi}{4}$

ข. $\frac{25\pi}{4}$

ค. $\frac{23\pi}{6}$

ง. $\frac{25\pi}{6}$

7. กำหนดให้วงรี E มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(1, 1)$ จุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่จุด $(3, 1)$

และความยาวแกนโทเท่ากับ 2 หน่วย

ถ้า $y = x + c$; $c > 0$ เป็นเส้นตรงซึ่งสัมผัสวงรี E แล้ว c มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\sqrt{5}$

ข. $\sqrt{6}$

ค. $\sqrt{7}$

ง. $\sqrt{8}$

8. กำหนดเซต $A = \{(x, y) \in I^+ \times I^+ / xy = 8640\}$

เซต A มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 18

ข. 24

ค. 28

ง. 56

ตอนที่ 2 (ข้อละ 3 คะแนน)

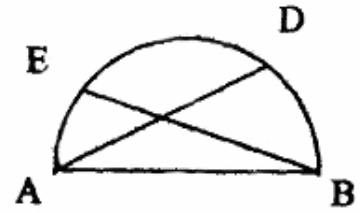
16. จากรูป AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

คอร์ด AD และ BE ตัดกันที่จุด C

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า $m\|\overrightarrow{AC}\| = n\|\overrightarrow{CD}\|$ แล้ว $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AD}$

(2) $\frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}} = \left(\frac{\|\overrightarrow{AE}\|}{\|\overrightarrow{BD}\|} \right)^2$



ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) และ (2) เป็นจริง

ข. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง

ค. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง

ง. ข้อ (1) และ (2) เป็นเท็จ

17. ถ้า $\log \frac{9}{10} = -a$, $\log \frac{24}{25} = -b$, $\log \frac{81}{80} = c$

แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

$\log 2 = 7a - 2b + 3c$

$\log 2 = 7a - 2b + 3c$

ก. $\log 3 = 9a - b + 5c$

ข. $\log 3 = 10a - 3b + 5c$

$\log 5 = 13a - 4b + 7c$

$\log 5 = 14a - 4b + 7c$

$\log 2 = 7a - 2b + 3c$

$\log 2 = 7a - 2b + 3c$

ก. $\log 3 = 11a - 3b + 5c$

ง. $\log 3 = 11a - 3b + 5c$

$\log 5 = 15a - 4b + 7c$

$\log 5 = 16a - 4b + 7c$

18. ค่าของ $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5} - 2\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{11\sqrt{5}}{25}$

ข. $\frac{12\sqrt{5}}{25}$

ค. $\frac{13\sqrt{5}}{25}$

ง. $\frac{14\sqrt{5}}{25}$



19. กำหนดให้จุด $O(0, 0)$, $A(4, 3)$ เป็นจุดในระนาบ

รูปสามเหลี่ยม OAB ที่มีพื้นที่น้อยที่สุด โดยที่ B เป็นจุดบนพาราโบลา $y = x^2 + \frac{265}{64}$

มีพื้นที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 6 ตารางหน่วย

ข. 7 ตารางหน่วย

ค. 8 ตารางหน่วย

ง. 9 ตารางหน่วย

20. ให้ \vec{a} , \vec{b} และ \vec{x} เป็นเวกเตอร์ ซึ่ง $(\vec{x} \cdot \vec{a})\vec{b} = \vec{a}$ และ $|\vec{a}| = 1$

ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

ก. \vec{x} และ \vec{a} ไม่ตั้งฉากกัน

ข. $\vec{x} \cdot \vec{b} = 1$

ค. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|$

ง. $|\vec{x}| \geq \frac{1}{|\vec{b}|}$

21. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $z^2 + \frac{1}{z^2} = 1$

ค่าของ $|z| + |z^2 - 1|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 1

ข. $\sqrt{2}$

ค. $\sqrt{3}$

ง. 2

22. มีลูกบอล 8 ลูกอยู่ในกล่อง เป็นลูกบอลสีดำ 3 ลูก และเป็นลูกบอลสีขาว 5 ลูก สุ่มหยิบออกมา 2 ลูก ถ้าลูกใดเป็นสีขาว จะระบายให้เป็นสีดำ แล้วใส่คืนกล่อง จากนั้น หยิบออกมาใหม่ 2 ลูก ความน่าจะเป็นที่ทั้งสองลูกนั้น เป็นลูกบอลสีดำเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{199}{784}$

ข. $\frac{190}{784}$

ค. $\frac{109}{784}$

ง. $\frac{99}{784}$

23. $\sum_{i=1}^{100} (-1)^i i^3$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

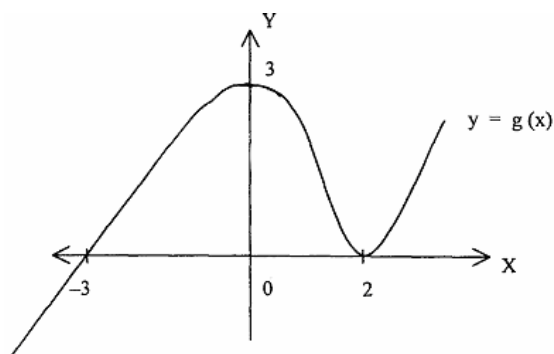
ก. 507451

ข. 507500

ค. 522700

ง. 522749

24. ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีอนุพันธ์ที่ทุกจุด โดยที่ $f(-3) = 1$ และ $f(2) = 5$
ให้ g เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f และ g มีกราฟดังรูป



จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) เส้นสัมผัสของกราฟ $y = f(x)$ ที่ $x = -3$ คือ $y = 1$

(2) f มีค่าต่ำสุดที่ $x = 2$ บนช่วง $(0, \infty)$

(3) พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = g(x)$ จาก $x = -3$ ถึง $x = 2$ มีค่าเท่ากับ 3 ตารางหน่วย

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง

ข. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง

ค. ข้อ (1) และ (3) เท่านั้นเป็นจริง

ง. ข้อ (2) และ (3) เท่านั้นเป็นจริง

25. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง มีนักเรียนหญิง และนักเรียนชายจำนวนเท่ากัน
คะแนนวิชาคณิตศาสตร์มีการแจกแจงปกติ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนของนักเรียนชายเป็น 4 เท่าของค่าเฉลี่ยเลขคณิต
ของคะแนนนักเรียนหญิง ความแปรปรวนของคะแนนของนักเรียนชาย และนักเรียนหญิงเป็น 25 และ 16 ตามลำดับ
ความแปรปรวนของคะแนนของนักเรียนทั้งชั้นมีค่าอยู่ระหว่าง 16 และ 25

ให้ a, b, c คือคะแนนที่เป็นเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 80 ของคะแนนของนักเรียนชาย,
นักเรียนหญิง และนักเรียนทั้งชั้น ตามลำดับ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. $a < b < c$

ข. $a < c < b$

ค. $b < a < c$

ง. $b < c < a$



ตอนที่ 3 จงเขียนเฉพาะคำตอบ (ข้อละ 4 คะแนน)

26. ให้ $\vec{v}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$, $\vec{v}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad A'A = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

จงหามุมระหว่าง \vec{v}_1 และ \vec{v}_2

27. ให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & c \end{bmatrix}$ โดยที่ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม

ถ้า $(A + I)^3 = 3A + I$ และ $\det(A + 3I) \neq 0$

แล้ว เมทริกซ์ A ที่มีสมบัติเช่นนี้ มีทั้งหมดกี่เมทริกซ์

28. กำหนดให้ A, B, C เป็นเซต ซึ่ง $n(A \cup B \cup C) = 6$ และ $n(B \cap C) = 2$

ถ้า $n(A \times B) = n(A \times C) = 6$ แล้ว $n(A - (B \cap C))$ เท่ากับเท่าใด

29. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมี $AB = \frac{4}{3}$ หน่วย และ $AC = 2$ หน่วย

ให้ P เป็นจุดบนด้าน BC ซึ่ง $BP : PC = 2 : 3$ และ $AP = 1$ หน่วย

ค่าของ $\cos\left(\frac{\widehat{BAC}}{2}\right)$ เท่ากับเท่าใด

30. ให้ $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2000| + |z - 2001| + |z - 2002| + |z - 2003| = 4\}$

ถ้า a และ b คือค่ามากที่สุด และค่าน้อยสุดของเซต $\{x \mid x = |z - (2000 + i)|, z \in S\}$ ตามลำดับ

แล้ว $a - b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

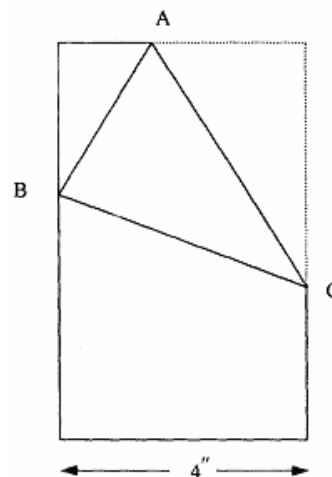
31. จงหาจำนวนสมาชิกของเซต $\{(x, y) \in I \times I / x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y\}$

32. ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะบวก ซึ่ง $p^2 + q = 37q^2 + p$
จงหาคู่อันดับ (p, q) ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

33. พัชรีทำรายงานชิ้นหนึ่ง โดยต้องออกไปเก็บข้อมูลนอกสถานที่ครั้งละ 1 วัน รวม 5 ครั้ง หลังจากออกไปเก็บข้อมูลแต่ละครั้ง ต้องกลับมาเขียนสรุปอย่างน้อย 3 วัน ก่อนจะไปเก็บข้อมูลครั้งต่อไป และหลังจากเก็บข้อมูลครั้งสุดท้ายแล้ว ไม่ต้องเขียนสรุปแต่ต้องเขียนเป็นรายงาน ซึ่งใช้เวลาอย่างน้อย 5 วัน

ถ้าพัชรีมีเวลาทั้งสิ้น 30 วัน เพื่อทำรายงานชิ้นนี้ จำนวนวิธีที่พัชรีจะเลือกออกไปเก็บข้อมูล 5 ครั้ง มีค่าเท่ากับเท่าใด

34. ถ้าเราพับมุมหนึ่งของกระดาษยาวรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านกว้าง 4 นิ้ว เป็นรูป $\triangle ABC$ จะมีพื้นที่น้อยที่สุด เมื่อ A อยู่ห่างจากมุมที่พับกี่นิ้ว



35. นายแดงขับรถฝ่าไปแดงด้วยความเร็ว 48 เมตรต่อวินาที และขับต่อไปด้วยความเร็วคงที่เท่าเดิม ตำรวจนายหนึ่งที่สี่แยกนั้นเห็นเข้า จึงนำรถที่จอดอยู่ออกตามหลังจากนั้น 9 วินาที ด้วยความเร่งคงที่ 8 เมตรต่อวินาที² จงหาว่า ตำรวจจะตามนายแดงทัน เมื่อนายแดงขับรถไปได้ไกลกี่เมตร

๕ ธันวาคม ร.ศ. ๒๒๒

