

## ฟิสิกส์ บทที่ 7 การเคลื่อนที่แบบหมุน

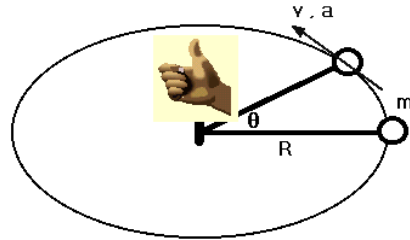
## ตอนที่ 1 การจัดเชิงมุม ความเร็วเชิงมุม และความเร่งเชิงมุม

การกระจัดเชิงมุม ( $\theta$ ) คือ มุมที่กวาดไป (เรเดียน)

ความเร็วเชิงมุมเฉลี่ย ( $\bar{\omega}$ ) คือ อัตราส่วนของการ  
จัดเชิงมุมต่อเวลาที่ใช้กวาดมุมนั้น (rad/s)

$$\bar{\omega} \text{ เฉลี่ย} = \frac{\theta}{t}$$

และ  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  ,  $\omega = 2\pi f$



T คือ คาบของการเคลื่อนที่ (วินาที)

f คือ ความถี่ของการเคลื่อนที่ (Hz)

1. ล้อหมุนอันหนึ่ง หมุนได้ 25 เรเดียน ในเวลา 10 วินาที จงหาอัตราเร็วเชิงมุมเฉลี่ยของการหมุนล้อนี้ (2.5 rad/s)

วิธีทำ

ความเร่งเชิงมุม ( $\alpha$ ) คือ อัตราส่วนของความเร็วเชิงมุมที่เปลี่ยนต่อเวลาที่ใช้ (rad/s<sup>2</sup>)

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

ความเร็ว และ ความเร่งเชิงมุม ถือเป็นปริมาณเวกเตอร์ สามารถหาทิศทางได้ โดยใช้กฎมือขวา โดยใช้มือขวากำแกนหมุน แล้วให้นิ้วทั้งสี่ส่วนตามการเคลื่อนที่ นิ้วหัวแม่มือ จะชี้ทิศของการกระจัด ความเร็ว และ ความเร่งเชิงมุมทันที

2. ล้ออันหนึ่ง ในตอนแรกหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงตัว 50 เรเดียน/วินาที ต่อมา ลดลงเหลือ 10 เรเดียน/วินาที ในเวลา 10 วินาที จงหาความเร่งเชิงมุม (-4 rad/s<sup>2</sup>)

วิธีทำ

**ควรถวาย** 1. เมื่อเปรียบเทียบการเคลื่อนที่แบบเส้นตรง และการเคลื่อนที่แบบหมุน

$$s \Rightarrow \theta, \quad a \Rightarrow \alpha, \quad u \Rightarrow \omega_0, \quad v \Rightarrow \omega$$

การเคลื่อนที่แบบเส้นตรง	การเคลื่อนที่แบบหมุน
$v = u + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$S = \left(\frac{u+v}{2}\right)t$	$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right)t$
$S = ut + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = u^2 + 2as$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$

2.  $v = \bar{\omega} R$

เมื่อ  $v$  คือ ความเร็วเชิงเส้น (เมตร/วินาที)

$a = \bar{\alpha} R$

$a$  คือ ความเร่งเชิงเส้น (เมตร/วินาที<sup>2</sup>)

(คือ ความเร็วและความเร่งของมวลที่เคลื่อนที่ตามเส้นรอบวง)

3. วัตถุก้อนหนึ่งหมุนรอบตัวเองด้วยความเร็วเชิงมุม 5 เรเดียน/วินาที เมื่อให้แรงกระทำในทิศเดียวกับการหมุน ปรากฏว่าวัตถุก้อนนั้นมีความเร่งเชิงมุม 2 เรเดียน/วินาที<sup>2</sup> จงหาว่าถ้าให้แรงกระทำนาน 10 วินาที ค่าความเร็วเชิงมุม ณ.วินาทีที่ 10 นั้นมีค่าเท่าใด (25 rad/s)

**วิธีทำ**

4. ล้ออันหนึ่งใช้เวลา 3 วินาที ในการหมุนไปได้มุมทั้งหมด 234 เรเดียน วัดความเร็วเชิงมุมขณะนั้นได้ 108 เรเดียน/วินาที จงหาความเร็วเชิงมุมตอนเริ่มต้น (48 rad/s)

**วิธีทำ**

5. จากข้อที่ผ่านมา จงหาความเร่งเชิงมุมของการหมุน ( 20 rad/s<sup>2</sup> )

วิธีทำ

6. ล้ออันหนึ่ง มีรัศมี 2 เมตร หมุนจากหยุดนิ่งจนมีความเร็วเชิงมุมคงตัว 100 เรเดียน/วินาที ในเวลา 20 วินาที จงหาความเร่งเชิงมุม (5 rad /s<sup>2</sup>)

วิธีทำ

7. จากข้อที่ผ่านมา จงหามุมที่หมุนไปได้ทั้งหมดตั้งแต่ต้น (1000 เรเดียน)

วิธีทำ

8. จากข้อที่ผ่านมา จงหาความเร็ว และความเร่งที่ผิวล้อ ณ.วินาทีที่ 20 (200 m/s, 10 m/s<sup>2</sup>)

วิธีทำ

9. จากข้อที่ผ่านมา ถ้าล้อนี้ออกไปข้างหน้า จงหาระยะทางที่ล้อนี้ออกไปได้ เมื่อผ่านไป 20 วินาที

วิธีทำ

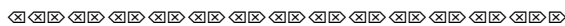
( 2000 ม.)

10. รถจักรยานคันหนึ่งแล่นเป็นเส้นตรงพบว่าล้อมีความเร่งเชิงมุม  $2 \text{ rad/s}^2$  ถ้าล้อรถมีเส้นผ่าศูนย์กลาง 1 เมตร จงหาระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ใน 20 วินาที นับจากริมต้น (200 ม.)

วิธีทำ

11. มวล 0.5 kg เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุดหมุนด้วยรัศมี 2 เมตร จากหยุดนิ่งจนมีความเร็วเชิงเส้น 20 m/s เมื่อเวลาผ่านไป 10 วินาที จงหาจำนวนรอบที่เคลื่อนที่ได้ (7.96 รอบ)

วิธีทำ



**ตอนที่ 2 โมเมนต์ความเฉื่อย และ โมเมนต์ของแรง**

โมเมนต์ความเฉื่อย ( $I$ ) คือ สภาพต้านการหมุนของวัตถุ

หากโมเมนต์ความเฉื่อย ( $I$ ) มีค่ามาก ความเร่งเชิงมุม ( $\alpha$ ) จะมีค่าน้อย ( หมุนยาก )

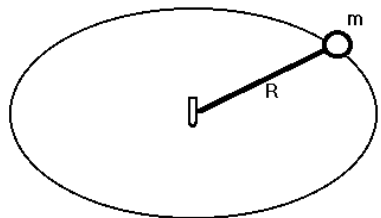
กรณีวัตถุเล็กๆ หมุนรอบจุดหมุน หรือ วงล้อ โมเมนต์ความเฉื่อยจะหาได้จาก

$$I = m R^2$$

เมื่อ  $I$  = โมเมนต์ความเฉื่อย ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )

$m$  = มวล ( $\text{kg}$ )

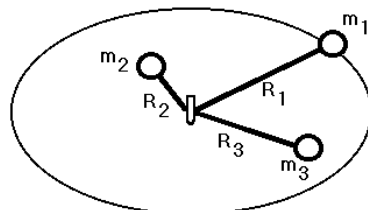
$R$  = รัศมีการหมุนของมวลนั้น ( $\text{m}$ )



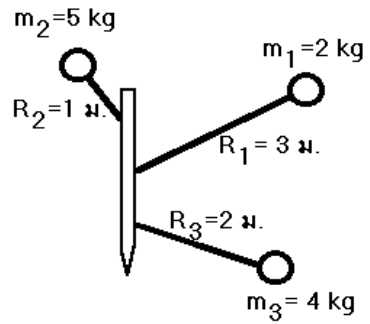
หากรอบแกนหมุนมีมวลย่อยๆ หลายชิ้นหมุนพร้อมกัน การหาโมเมนต์ความเฉื่อย ให้หาโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลแต่ละก้อน แล้วนำมารวมกัน

$$I = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2$$

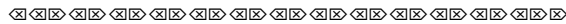
$$I = \sum mR^2$$



12. จากรูป มวล 3 ก้อน เคลื่อนที่รอบแกน หมุนเดียวกันพร้อมกัน จงหาโมเมนต์แห่ง ความเฉื่อยของการหมุนนี้ (39 kg.m<sup>2</sup>)



วิธีทำ



ในกรณีวัตถุรูปร่างอื่นๆ เราอาจหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยได้ดังนี้

รูปร่างวัตถุ	แกนหมุน	รูป	โมเมนต์ความเฉื่อย
ทรงกลมตัน มวล m รัศมี R	รอบแกนผ่าน จุดศูนย์กลาง		$I = \frac{2}{5} mR^2$
ทรงกลมกลวง มวล m รัศมี R	รอบแกนผ่านจุด ศูนย์กลาง		$I = \frac{2}{3} mR^2$
ทรงกระบอกตัน มวล m รัศมี R ยาว L	รอบแกนของ ทรงกระบอก		$I = \frac{1}{2} mR^2$
แผ่นกลมบาง มวล m รัศมี R	รอบแกนผ่านศูนย์กลาง บนระนาบของแผ่น		$I = \frac{1}{4} mR^2$
แท่งวัตถุเล็ก มวล m ยาว L	รอบแกนผ่านศูนย์กลาง มวล ตั้งฉากกับแท่ง		$I = \frac{1}{12} mL^2$

การหมุนของวัตถุทั้งหมดในตารางนี้ เป็นการหมุนรอบแกนผ่านศูนย์กลางมวล และเป็นสมมาตรของวัตถุซึ่งแกนนั้นต้องอยู่กับที่ ถ้าเลื่อนแกนหมุนไปเป็นระยะ L ขนานกับ แกนสมมาตรเดิม โมเมนต์ความเฉื่อยจะเพิ่มขึ้นอีก  $mL^2$  โมเมนต์ความเฉื่อยรวมจึงต้อง นำ  $mL^2$  บวกเพิ่มเข้าไปด้วย

โมเมนต์ของแรง คือ แรง x รัศมีการหมุน

$$\tau = FR$$

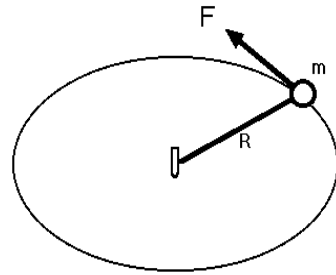
เมื่อ  $\tau$  (เรียกว่า ทอร์ก) คือ โมเมนต์ของแรง ( $N \cdot m$ )

$F$  คือ แรงที่ทำให้เกิดการหมุน (N)

$R$  คือ รัศมีการหมุน (m)

และ

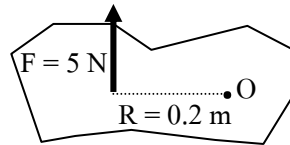
$$\tau = I\alpha$$



13. จากรูปจงหาทอร์กที่กระทำต่อวัตถุนี้

วิธีทำ

(1 N.m)



14. ล้อวงหนึ่งมีโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุน 500 กิโลกรัม.เมตร<sup>2</sup> จงหาค่าทอร์กที่ทำให้  
วงล้อนี้หมุนด้วยความเร่งเชิงมุม 4 เรเดียน/วินาที<sup>2</sup> (2000 N.m)

วิธีทำ

15. จงหาทอร์กที่ทำให้ล้อมวล 8 กิโลกรัม รัศมี 25 เซนติเมตร หมุนด้วยความเร่ง 3 เรเดียน/วินาที<sup>2</sup>

1. 0.5 N.m

2. 1.0 N.m

3. 1.5 N.m

4. 2.0 N.m

(ข้อ 3)

วิธีทำ

16. จงหาทอร์กที่ใช้ในการทำให้จานกลมที่มีโมเมนต์ความเฉื่อย 5 กิโลกรัม.เมตร<sup>2</sup> เริ่มหมุน  
จากหยุดนิ่งจนกระทั่งมีความเร็วเชิงมุม 30 เรเดียน/วินาที ใน 10 วินาที

1. 15 N.m

2. 22 N.m

3. 44 N.m

4. 88 N.m

(ข้อ 1)

วิธีทำ

17. จงหาทอร์กที่ใช้ในการทำให้จานกลมที่มีโมเมนต์ความเฉื่อย  $10 \text{ กิโลกรัม.เมตร}^2$  เริ่มหมุนจากหยุดนิ่งจนกระทั่งมีความเร็วเชิงมุม  $20 \text{ เรเดียน/วินาที}$  ใน  $5 \text{ เรเดียน}$  (400 N.m)

วิธีทำ

18. จงหาทอร์กที่ใช้ในการทำให้จานกลมที่มีโมเมนต์ความเฉื่อย  $20 \text{ กิโลกรัม.เมตร}^2$  เริ่มหมุนจากหยุดนิ่งจนกระทั่งมีอัตราเร็ว  $7 \text{ รอบ/วินาที}$  ใน  $10 \text{ วินาที}$  (88 N.m)

วิธีทำ

19. วงล้อมีรัศมี  $25 \text{ cm}$  หมุนโดยไม่มีแรงเสียดทานด้วยความเร่งเชิงมุม  $2.25 \text{ rad/s}^2$  เมื่อมีแรงคงที่  $90 \text{ นิวตัน}$  กระทำในแนวเส้นสัมผัสกับวงล้อ จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวงล้อ (ข้อ 3)
1.  $0.1 \text{ kg.m}^2$       2.  $1.0 \text{ kg.m}^2$       3.  $10.0 \text{ kg.m}^2$       4.  $40.0 \text{ kg.m}^2$

วิธีทำ





### ตอนที่ 3 โมเมนตัมเชิงมุม และ กฎทรงโมเมนตัมเชิงมุม

โมเมนตัมเชิงมุม ( $L$ ) คือ ผลคูณระหว่างโมเมนต์ความเฉื่อย ( $I$ ) กับความเร็วเชิงมุม ( $\omega$ )

$$L = I \omega$$

เมื่อ  $L$  คือ โมเมนตัมเชิงมุม ( $\text{kg.m}^2 \cdot \text{rad/s}$ )

$I$  คือ โมเมนต์ความเฉื่อย ( $\text{kg.m}^2$ )

$\omega$  คือ ความเร็วเชิงมุม ( $\text{rad/s}$ )

พิจารณา  $L = I \omega$

และ

$$\alpha = \frac{\omega}{t}$$

$$\omega = \alpha t$$

จะได้  $L = I \alpha t$

$$L = \tau t$$

22. ถ้าเหวี่ยงมวล 0.2 กิโลกรัม ด้วยเชือกยาว 4 เมตร ให้เคลื่อนที่เป็นวงกลมในระนาบระดับ ถ้าความเร็วเชิงมุมมีค่า 10 เรเดียน/วินาที จงหาโมเมนตัมเชิงมุม (32  $\text{kg.m}^2/\text{s}$ )

วิธีทำ

23. วัตถุมวล 0.2 กิโลกรัม ผูกติดกับปลายข้างหนึ่งของเส้นเชือกยาว 2 เมตร จับปลายอีกข้างหนึ่งเหวี่ยงให้วัตถุเคลื่อนที่ในแนววงกลม ในระนาบระดับด้วยอัตราเร็วคงที่ 10 เมตร/วินาที จงหาโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุนี้ ในหน่วยกิโลกรัม.เมตร<sup>2</sup>/วินาที

1. 2

2. 4

3. 8

4. 16

(ข้อ 2)

วิธีทำ

กฎทรงโมเมนตัมเชิงมุม กล่าวว่า “ หากทอร์คมีค่าเป็นศูนย์ โมเมนตัมเชิงมุมจะมีค่าคงตัว”  
 นั่นคือ  $\Sigma L_1 = \Sigma L_2$

24. ชายคนหนึ่ง ถือดัมเบลไว้สองมือ ยืนบนเก้าอี้ที่หมุนได้อย่างเสรีไม่มีแรงเสียดทานและมีแกนหมุนอยู่ในแนวตั้งขณะที่เขากางมือออก โมเมนต์ความเฉื่อยของชายคนนั้นและเก้าอี้เท่ากับ 2.25 กิโลกรัม.เมตร<sup>2</sup> ความเร็วเชิงมุมเริ่มต้นในการหมุน 5 เรเดียน/วินาที เมื่อเขาหุบแขนทั้งสองเข้าหาตัว โมเมนต์ความเฉื่อยรวมเท่ากับ 1.80 กิโลกรัม.เมตร<sup>2</sup> อัตราเร็วเชิงมุมในการหมุนขณะหุบแขนมีค่าเท่าใด (6.25 rad/s)

**วิธีทำ**

- 25(En 40) วัตถุมวล 50 กรัม ผูกติดกับปลายเชือกซึ่งลอดผ่านรูหลอดเล็กๆ ปลายเชือกข้างหนึ่งดึงยึดไว้ด้วยแรงค่าหนึ่งแล้วเหวี่ยงให้เป็นวงกลมรัศมี 1 เมตร ถ้าดึงเชือกให้รัศมีวงกลมเป็น 50 เซนติเมตร ทันที วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเชิงมุมเท่าไรในหน่วยเรเดียน/วินาที ถ้าเดิมมีอัตราเร็วเชิงมุม 3 เรเดียนต่อวินาที (12 rad/s)

**วิธีทำ**

26. ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนแป้นหมุน ในขณะที่เหยียดแขนออกเขาหมุนด้วยอัตราเร็ว 0.50 รอบ/วินาที แต่เมื่อเขาดึงแขนเข้าข้างตัว อัตราเร็วเปลี่ยนเป็น 0.75 รอบ/วินาที จงหาอัตราส่วนของโมเมนต์ความเฉื่อยของระบบตอนแรกต่อตอนหลัง

1.  $\frac{2}{3}$

2.  $\frac{4}{9}$

3.  $\frac{3}{2}$

4.  $\frac{9}{4}$  (ข้อ 3)

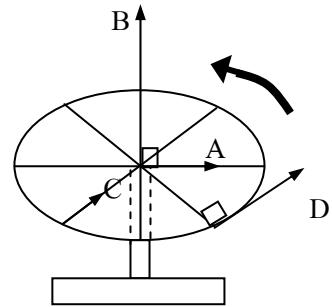
วิธีทำ

27. ชายคนหนึ่งมีมวล 80 กิโลกรัม ยืนอยู่บนขอบของม้าหมุนเด็กเล่นที่อยู่หนึ่งที่ระยะ 4 เมตร จากจุดศูนย์กลาง ชายคนนี้ได้เดินไปตามขอบของม้าหมุนด้วยอัตราเร็ว 1 เมตร/วินาที เทียบกับพื้น การเคลื่อนที่นี้จะทำให้ม้าหมุน หมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุมเท่าใด ถ้าม้าหมุนมีโมเมนต์ความเฉื่อย 10000 กิโลกรัม.เมตร<sup>2</sup> (-0.032 rad/s)

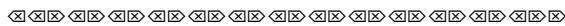
วิธีทำ

28. ล้อวงกลมหมุนอยู่ในระนาบระดับ โดยมีแกนหมุนอยู่ในแนวตั้งตั้งรูปด้วยอัตราเร็วคงที่ โมเมนต์เชิงมุมของล้อมีทิศใด (ข้อ 2)

1. A      2. B      3. C      4. D



วิธีทำ



**ตอนที่ 4 การทำงานในการหมุน**

เราสามารถคำนวณงานในการหมุนตัวได้จาก

$$W = \tau \theta$$

และ กำลังในการหมุนหาค่าได้จาก

$$P = \frac{W}{t}$$

$$P = \frac{\tau \theta}{t}$$

$$P = \tau \omega$$

เพราะ  $W = \tau \theta$

เพราะ  $\omega = \frac{\theta}{t}$

เมื่อ W คือ งานที่เกิดจากการหมุน

P คือ กำลังของการหมุน

29. เครื่องยนต์ขนาด 50 กิโลวัตต์ หมุนล้อในอัตรา 3500 รอบ/นาที จงหาทอร์กที่เกิดจากเครื่องยนต์ในตอนนี้ (136.36 N.m)

วิธีทำ

### ตอนที่ 5 พลังงานจลน์ของการหมุน

พลังงานจลน์ของการหมุน

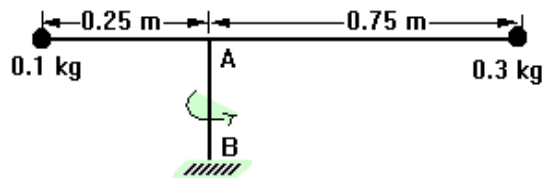
$$\text{หาจาก } E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$



30. ม้าหมุนชุดหนึ่งมีโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุนในแนวตั้ง 900 กิโลกรัม.เมตร<sup>2</sup> ถ้าผลักให้หมุนในอัตรา 2 รอบต่อนาที จงหาพลังงานจลน์ของม้าหมุนนี้ (19.7 จูล)

วิธีทำ

- 31(En 40) วัตถุมวล 0.1 กิโลกรัม และ 0.3 กิโลกรัม ติดอยู่กับปลายทั้งสองของแท่งโลหะยาว 1.00 เมตร ดังรูป จงหาพลังงานจลน์ของการหมุน ถ้าแท่งโลหะหมุนรอบแกน AB 10 เรเดียน/วินาที



1. 3.75 J      2. 5.63 J      3. 7.50 J      4. 15.0 J      (ไม่มีคำตอบ)

วิธีทำ

32. วัตถุมวล  $m$  มีโมเมนต์ความเฉื่อย  $I$  และมีโมเมนต์เชิงมุม  $L$  จะมีพลังงานจลน์เท่าใด

1.  $\frac{I}{2L^2}$       2.  $\frac{mL^2}{2L}$       3.  $\frac{L^2}{2I}$       4.  $\frac{mL^2}{2I}$       (ข้อ 3)

วิธีทำ

**ถ้าวัตถุกลิ้ง (หมุนพร้อมกับเคลื่อนที่ไป)**

พลังงานจลน์ = พลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่แบบเลื่อนที่  
+ พลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่แบบหมุน

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$



33. แผ่นไม้กลมมีรัศมี 0.5 เมตร มวล 2 กิโลกรัม และโมเมนต์ความเฉื่อย 0.25 กิโลกรัม.เมตร<sup>2</sup> เคลื่อนที่ในแนวตรง โดยมีความเร็วของศูนย์กลางมวล 4 เมตรต่อวินาที จงหาพลังงานจลน์ของแผ่นไม้นี้ เมื่อวัตถุเคลื่อนที่โดยหมุนกลิ้งรอบศูนย์กลางมวล (24 J)

**วิธีทำ**

- 34(มข 37) แผ่นไม้กลมแบนรัศมี 8.0 เซนติเมตร มวล 280 กรัม กำลังกลิ้งไปตามพื้นราบอย่างสม่ำเสมอโดยไม่มีการไถล ศูนย์กลางมวลของแผ่นไม้มีความเร็ว 0.16 เมตร/วินาที พลังงานจลน์ของแผ่นไม้ในการกลิ้งครั้งนี้ รวมทั้งสิ้นมีค่าเท่าใด กำหนดโมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นไม้เท่ากับ  $9.0 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^2$

1.  $1.8 \times 10^{-3}$  จูล

2.  $3.58 \times 10^{-3}$  จูล

3.  $5.38 \times 10^{-3}$  จูล

4.  $7.18 \times 10^{-3}$  จูล

(ข้อ 3)

**วิธีทำ**

35. ท่อทรงกระบอกกลิ้งไปตามพื้นระดับโดยไม่ไถล จงหาอัตราส่วนระหว่างพลังงานจลน์ของการหมุนต่อพลังงานจลน์ของการเลื่อนตำแหน่ง ( $I$  ทรงกระบอก =  $m r^2$ )

1.  $\frac{1}{2}$

2. 1

3. 2

4. 4

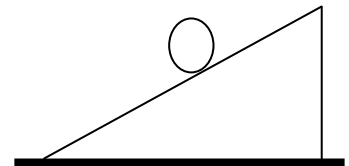
(ข้อ 2)

วิธีทำ

36. แผ่นโลหะกลมมวล 1 กิโลกรัม รัศมี 0.2 เมตร มีโมเมนต์ความเฉื่อย  $0.02$  กิโลกรัม . เมตร<sup>2</sup> เคลื่อนที่จากหยุดนิ่งลงมาตามพื้นเอียงดังรูป จนศูนย์กลางมวลต่ำกว่าเดิม 1 เมตร จงหาความเร็วสูงสุดของแผ่นโลหะนี้เมื่อ

ก. เคลื่อนที่แบบไถล

ข. เคลื่อนที่แบบกลิ้ง



(4.47 m/s , 3.65 m/s)

วิธีทำ

37. ปล่อยวงล้อรัศมี 40 เซนติเมตร กิ่งลงมาจากเนิน ฅ. ตำแหน่งที่สูง 3.6 เมตร จงหาอัตราเร็วเชิงมุมเมื่อถึงปลายล่างเนิน

1. 15 rad/s

2. 30 rad/s

3. 45 rad/s

4. 60 rad/s (ข้อ 1)

วิธีทำ