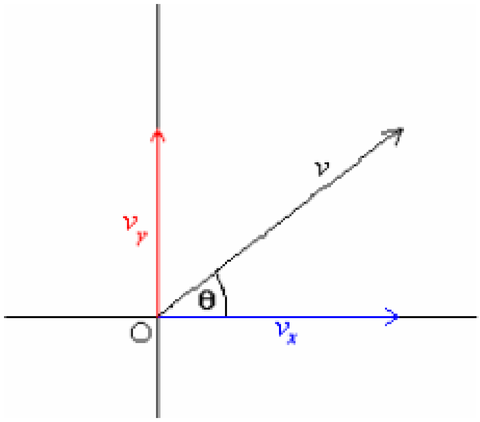
Sudipan.net

1. ลูกบอลถูกโยนโดยความเร็วต้น v มุมทวนเข็มนาฬิกา θ จาก แกน X. จากนั้น มันก็เคลื่นที่แบบโปรเจไตล์ ด้วยความเร่ง -g

   a) หาฟังก์ชันในรูปแบบ พาราเมตริกโดยมีตัวแปร t โดยหาทั้งแกน X และ Y.

   b) เขียนสมการที่บอลอยู่ห่างจากจุด (0,0) โดยใช้ตัวแปร t, v, and θ .

   c) หาค่าที่มากที่สุดของ θ หลังจากลูกบอลถูกโยน, โดยกำหนด ว่าระยะทางบอล จากจุด (0,0) ไม่เคยลดลง



เฉลย

a) จากลูกบอลมีความเร่ง g, ได้ว่า:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

$$\int \frac{d^2y}{dt^2}\,dt = \int -g\,dt$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1$$

เรารู้ว่าที่ $t = 0$, $\frac{dy}{dt} = v_y = v\sin\theta$. ได้ว่า,

$$v\sin\theta = (-g)\cdot 0 + C_1$$

$$C_1 = v\sin\theta$$

และ,

$$\frac{dy}{dt} = v\sin\theta - gt$$

$$\int \frac{dy}{dt}\,dt = \int (v\sin\theta - gt)\,dt$$

$$y = vt\sin\theta - g\frac{t^2}{2} + C_2$$

เรารู้ว่าที่ $t = 0$, $y = 0$. ได้ว่า,

$$0 = v \cdot 0 \cdot \sin\theta - g\frac{0^2}{2} + C_2$$

$$C_2 = 0$$

เพราะฉะนั้น,

$$y = vt\sin\theta - g\frac{t^2}{2}$$

การเดินทางในแนว X, เราได้ว่า:

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\theta$$

$$\int \frac{dx}{dt}\,dt = \int v\cos\theta\,dt$$

$$x = vt\cos\theta + C$$

เรารู้ว่า, at $t = 0$, $x = 0$. จากนั้น,

$$0 = v \cdot 0 \cdot \cos\theta + C$$

$$C = 0$$

และเราได้ว่า,

$$x = vt\cos\theta$$

สมการแบบพาราเมตริกซ์จะเขียนได้ว่า $x = vt\cos\theta$, และ $y = vt\sin\theta - g\frac{t^2}{2}$.

a) ให้ L เป็นระยะทางของบอลจากจุด (0,0).

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(vt\cos\theta)^2 + (vt\sin\theta - g\frac{t^2}{2})^2} \\ &= \sqrt{v^2t^2\cos^2\theta + v^2t^2\sin^2\theta - vgt^3\sin\theta + \frac{1}{4}g^2t^4} \\ &= \sqrt{v^2t^2 - vgt^3\sin\theta + \frac{1}{4}g^2t^4} \\ &= t\sqrt{v^2 - vgt\sin\theta + \frac{1}{4}g^2t^2} \end{aligned}$$

b) เนื่องจาก L ไม่เคยลดลง, $\frac{dL}{dt} \geq 0$.

$$\frac{dL}{dt} \geq 0$$

$$\frac{d}{dt}\sqrt{v^2t^2 - vgt^3\sin\theta + \frac{1}{4}g^2t^4} \geq 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{v^2t^2 - vgt^3\sin\theta + \frac{1}{4}g^2t^4}} \cdot \left(2v^2t - 3vgt^2\sin\theta + g^2t^3\right) \geq 0$$

เนื่องจาก t ไม่เป็น 0 และ $\sqrt{v^2t^2 - vgt^3\sin\theta + \frac{1}{4}g^2t^4}$ เป็นบวกเสมอ, เราจะต้องได้

$$2v^2 - 3vgt\sin\theta + g^2t^2 \geq 0$$

$$\left(g^2t^2 - 3vgt\sin\theta + \frac{9}{4}v^2\sin^2\theta\right) - \frac{9}{4}v^2\sin^2\theta + 2v^2 \geq 0$$

$$\left(gt - \frac{3}{2}v\sin\theta\right)^2 - \frac{9}{4}v^2\sin^2\theta + 2v^2 \geq 0$$

จาก $\left(gt - \frac{3}{2}v\sin\theta\right)^2$ ไม่มีทางเป็นลบ หรือ 0 จากที่ $t = \frac{3}{2}v\sin\theta$, $-\frac{9}{4}v^2\sin^2\theta + 2v^2$ ไม่เป็นลบ
เพราะฉะนั้น $2v^2 - 3vgt\sin\theta$ จึงเป็นจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนลบสำหรับทุกๆ t.

$$-\frac{9}{4}v^2\sin^2\theta + 2v^2 \geq 0$$

$$\frac{9}{4}v^2\sin^2\theta \leq 2v^2$$

$$\sin^2\theta \leq \frac{8}{9}$$

$$\sin\theta \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\theta \leq \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

เพราะฉะนั้น มุมที่ใหญ่ที่สุดคือ $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Sudipan.net

1. ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถอนุพันธ์ได้และต้องมีคุณสมบัติดังนี้

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

   สำหรับทุกๆ $x,y \in \mathbb{R}$. กำหนด $f'(0)=3$, หา $f(x)$

นำ $x=0$, และ $y=0$, ไปแทน เราได้

$$f(0)=(f(0))^2$$
$$(f(0))^2-f(0)=0$$
$$f(0)(f(0)-1)=0$$
$$f(0)=0,1$$

แต่ว่า, $f(0)$ ไม่สามารถเป็น 0. และถ้า, $f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)=0$, ได้ว่า $f'(x)=0$ สำหรับทุกๆ x , ซึ่งขัดแย้งกับ $f'(0)=3$. เพราะฉะนั้น, $f(0)=1$.

พิจารณาที่ y เป็นเลขตัวนึง,

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$
$$f'(x+y)=f'(x)f(y)$$
$$f'(0+y)=3f(y)$$
$$f'(y)=3f(y)$$

** สมการนี้ ใช้ได้สำหรับทุก y . เพราะฉะนั้นเราสามารถทำให้ y เป็นตัวแปรได้.

$$f'(y)=3f(y)$$
$$\int \frac{f'(y)}{f(y)}dy=\int 3\,dy$$
$$\ln|f(y)|=3y+C$$
$$f(y)=\left(\pm e^{C}\right)e^{3y}$$

ให้ $A=\pm e^{C}$. เนื่องจาก $f(0)=1$, ได้ว่า

$$1=Ae^{3\cdot 0}$$
$$A=1$$

เพราะฉะนั้น, เราได้ว่า $f(x)=e^{3x}$.

Sudipan.net

1. จงหาค่าของข้อต่างๆดังนี้ โดยไม่ใช้การอินทิเกรต:

   a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$

   b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} \, dx$

   c) $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} \, dx$

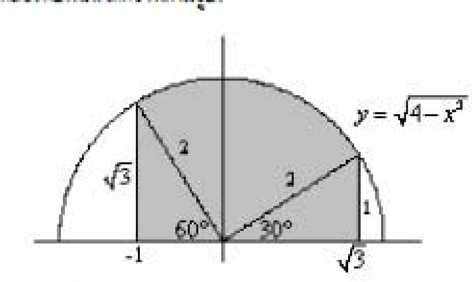
a) หลังจากดูกราฟ $y=\sin x$ และ $y=\cos x$ บนช่วง $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ มันดูเหมือนกัน เพียงแค่หมุนกราฟที่แกน $x=\frac{\pi}{4}$. เพราะฉะนั้น, $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$. และเราจะได้ว่า

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx + \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1 \cdot dx =$$

b) อันนี้ ต้องลองดูอา

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} &= \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} + \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^{\sqrt{2}}} \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\left(\frac{1}{\tan x}\right)^{\sqrt{2}}} \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{(\tan x)^{\sqrt{2}}}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}} \, dx \\
&= \int_0^{\pi/4} 1 \cdot dx = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

c) เนื่องจากการอินทิเกรต สอดคล้องกับพื้นที่ใต้กราฟตามรูป.



พ.ท. $= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3} + \frac{1}{4}\pi\left(2^2\right) = \pi + \sqrt{3}$

4. ทำตามทุกอย่างที่บอก:

a) จงหาอินทิเกรตของ $\int_0^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$ ซึ่งเป็นdiverges.

b) ทำไมเราจึงสรุปได้ว่า a) that $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$ เป็น diverges.

c) แสดงให้เห็นว่า $\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = 0$

d) จงแสดงให้ดูว่าในข้อ c) ไม่ต่างจาก b).

a) ให้ $u = x^2+1$. เราจะได้ว่า $du = 2x\,dx$, and $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln(x^2+1)$.

$$\int_0^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \left[\ln(x^2+1)\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \ln(b^2+1)$$

จาก b เพิ่มเรื่อยๆ โดยไม่มีขอบเขต, $\ln(b^2+1)$ ก็เหมือนกัน. เพราะฉะนั้น, $\int_0^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$ เป็น diverges.

b) จาก, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int_0^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1} + \int_{-\infty}^{0} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$, และ $\int_0^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$ เป็น diverges, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$ diverges by the definition of improper integral.

c) $\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \left[\ln(x^2+1)\right]_{-b}^{b} = \lim_{b\to\infty} \left(\ln(b^2+1) - \ln(b^2+1)\right) = \lim_{b\to\infty} 0 = 0$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$ นิยามเป็น $\int_c^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1} + \int_{-\infty}^{c} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$, c เป็นจำนวนคงที่จำนวนหนึ่ง, ซึ่งไม่ใช่ $\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$.